Introduction to Commutative Algebra - Part3.

---

6. 链条件

6.1 对于偏序集$(\Sigma, \leq)$（满足传递性，反对称性，自反性），以下二者等价：

1. 每个升链$x_1 \leq x_2 \leq \cdots$稳定；**2.** 每个非空子集存在极大元。

证：

$1 \implies 2.$ 若否，存在一个子集$T \subseteq \Sigma$，不存在极大元。那么可以归纳地构造出永不停止的升链。（不断选出元素）

$2 \implies 1.$ $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$存在极大元，于是升链稳定。

定义（**Noether**性与**Artin**性）

取Σ为全体M的子模，偏序定义为包含。则条件**6.1.1**称为**a.c.c**，**6.1.2**称为极大条件，满足条件的模称为**Noetherian**的。

取Σ为全体M的子模，偏序定义为反包含。则条件**6.1.1**称为**d.c.c**，**6.1.2**称为极小条件，满足条件的模称为**Artinian**的。

特别地，如果一个环作为自身的模满足上述两个性质，则分别称之为**Noetherian**环和**Artinian**环。

例子：

1. 有限**Abel**群（作为$\mathbb{Z}-$模）同时满足**a.c.c.**和**d.c.c.**；

2. $\mathbb{Z}$是**a.c.c.**的（注意它是**PID**），但不是**d.c.c.**的。（$(p)\supseteq(p^2)\supseteq\cdots$）

3. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$中的分母为p的幂次构成的子群G作为$\mathbb{Z}$模不是**a.c.c.**的，因为$G_0\subset G_1\subset\cdots\subset G_n$，其中$G_i=\{\overline{a/p^i}\}$是子群。

另一方面G_i是所有的子群，于是它满足**d.c.c.**

4. 全体分母为p的幂次构成的子群H不满足任何链条件。

$0\to Z\to H\to G\to 0$，由于$\mathbb{Z}$不满足**d.c.c.**，于是H不满足**d.c.c.**；由于G不满足**a.c.c.**，于是H不满足**a.c.c.**

5. $k[x]$作为$k[x]-$模满足**a.c.c.**，但是不满足**d.c.c.**

6. $k[x_1,\cdots]$作为自身上的模不满足任何链条件。不满足**d.c.c.**是因为$(x_1)\supseteq(x_1^2)\supseteq$；不满足**a.c.c.**是因为$(x_1)\subseteq(x_1,x_2)\subseteq\cdots$

7. 环（作为自身的模）只要满足**d.c.c.**就一定满足**a.c.c.**；但是对于一般的模则不一定。

8. 域作为环既是**Noetherian**的也是**Artinian**的。$\mathbb{Z}/(n)$也是如此，但是$\mathbb{Z}$是**Noetherian**环但不是**Artinian**环。（2）

9. 主理想整环都是**Noetherian**环：由**6.2**即证。

10. Noetherian环的子环不一定**Noetherian**：$k[x_1,\cdots,x_n]$不是**Noetherian**环，但是它是整环，于是是其分式域的子环。（注意这不和**6.4**矛盾）

11. X是紧非有限**Hausdorff**空间，$C(X)$是其上连续实值函数环。取一个严格闭集降链$F_1\supseteq F_2\supseteq\cdots$，$\mathfrak{a}_n=\{f\in C(X)|f(F_n)=0\}$，得到了严格理想升链，于是$C(X)$不是**Noetherian**环。

6.2 M是**Noetherian**$A-$模 $\Longleftrightarrow$ 每个子模都有限生成。

证：$\Longrightarrow$ 取对于一个子模N，取集合为其全体有限生成的子模。于是存在极大元，设为N_0，若$N_0\neq N$，取$x\in N-N_0$，那么$N_0+Ax\subseteq N$，矛盾。故$N_0=N$

$\Longleftarrow$ 对于任何子模的升链$M_1\subseteq\cdots$，取$N=\cup M_i$，当然是子模，于是有限生成。设

$x_i \in M_{n_i}$，$n = \max n_i$，那么$x_i \in M_n$，于是$M_n = N$，从而说明了稳定性。

6.2dual. M**是Artinian**$A-$**模** $\iff$ **每个商模余有限生成。**

Remark. 这里余有限生成的定义为：存在一个$A-$模Y，有限指标集J和单同态
$\alpha: M \to \prod_{j \in J} Y$，则称$M$余有限生成。

6.1 Noetherian/Artinian模的共用性质

6.3 给定正合列$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$，那么：

M **Noetherian (resp. Artinian)** $\iff$ M', M'' **Noetherian (resp. Artinian)**

证：

仅证明Noether部分，Artin同理。

$\implies$. 子模和商模的子模升链都诱导出了原模的子模升链，于是得证。

$\impliedby$. M的子模升链L_n诱导出了其在M'和M''的两个升链。由于它们最终都稳定，于是L_n最终稳定。

6.4 Noetherian (resp. Artinian) 模的直和仍然是 **Noetherian (resp. Artinian)的。**

6.5 Noetherian (resp. Artinian) 环上的有限生成模是**Noetherian (resp. Artinian)的。**

证：有限生成模是A^n的商模，由6.3,6.4即证。

尽管Noetherian环的子环不一定是Noetherian的，但是对于商环性质保持：

6.6 Noetherian (resp. Artinian) 环A以及其理想$\mathfrak{a}$，那么$A/\mathfrak{a}$是Noetherian (resp. Artinian) 环。

证：

由对应定理直接得证。

Summary：Noetherian环（Artin resp.）的商环，直和，其上的有限生成模都是Noetherian(Artin resp.)的。

6.2 合成列

称一条链为若干M的子模构成的严格链：$0=M_n\subset M_{n-1}\subset\cdots\subset M_0=M$，记它的长度为$n$。

（合成列）称一个链是合成列如果M_{i-1}/M_i是单的，即不能再插入更多的子模。

我们接下来研究合成列的长度，说明它和合成列的选取无关。

6.7（合成列长度与链选取无关）假定M有一个长度为n的合成列，那么它的所有合成列长度都是n，并且每条M的链都可以被扩展为一条合成列。

证：记$l(M)$为M的最短合成列的长度。（若无合成列则记为$+\infty$）

1. $N\subset M\implies l(N)<l(M)$

取(M_i)为最短长度的合成列。那么考虑$N_i=N\cap M_i$，于是$N_{i-1}/N_i\subseteq M_{i-1}/M_i$（可直接构造嵌入的单同态）

于是单性保证要么$N_{i-1}/N_i=M_{i-1}/M_i$，要么$N_{i-1}=N_i$。因此去除(N_i)的重复项得到了一个N的合成列。那么$l(N)\le l(M)$。

若$l(N)=l(M)=n$，于是$N_{i-1}/N_i=M_{i-1}/M_i,\forall i$。归纳地可以说明$M_i=N_i$，于是最后得到$M=N$，矛盾。

2. **M的每条链长度$\le l(M)$**

设为$M=M_0\supset M_1\supset\cdots\supset M_k=0$，具有长度$k$。那么由1，
$l(M)>l(M_1)>\cdots>l(M_k)=0$，于是$l(M)\geq k$

3.

对于任何M的合成列，应用2立刻知所有合成列长度相等。

对于任何链，如果其长度为$l(M)$只能是合成列。（考虑2的证明）若其长度小于$l(M)$就不断插入项直到长度到达$l(M)$。

6.8（合成列存在性）M存在合成列 $\iff$ M满足**a.c.c.和d.c.c.**

证：$\implies$. 由6.7，链长度有限，于是立刻得证。

$\impliedby$. 由与a.c.c.成立，任何子模集合的极大元存在。那么选取$M_0=M$的真子模的一个极大元得到M_1，继续选取极大元得到$M_0\supset M_1\supset M_2\supset\cdots$

由于d.c.c.这个链一定终止。终止处一定有$M_n=0$（真子模集合为空集），于是得到了合成列。

6.9（**Jordan-Holder**定理）任意两个合成列的合成因子在同构和交换顺序意义下等价。

证明同群论中利用Zassenhaus引理进行构造。

6.10 对于有限长的模（即同时满足**a.c.c.和d.c.c.**）$l(M)$定义了一个加性函数。

证：对于$0\to M'\to M\to M''\to 0$，需证明$l(M)=l(M')+l(M'')$

这是显然的，因为将子模和商模的两个合成列可以拼成M的合成列。

6.3 例子

考虑一个特殊的例子：$k-$线性空间。

6.11 对于域k上的线性空间V，以下四者等价：

1. 有限维；**2.** 有限长；**3.** **a.c.c.**；**4.** **d.c.c.**

并且以上成立时长度与维度相等。

证：

$1 \implies 2$.是显然的。$2 \implies 3,4$.由6.8得到。

$3,4 \implies 1$. 若维数不有限，存在一列无限长序列$(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$且它们线性无关。

取$U_n = span < x_1, \cdots, x_n >$；$V_n = span < x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots >$。那么$U_n, V_n$分别为严格升、降链。于是矛盾，从而完成了证明。

6.12 A是环，满足$(0) = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$为若干（不必互不相同的）极大理想的乘积。那么$A$是**Noetherian**环 $\iff A$是**Artinian**环。

证：

考虑$A \supset \mathfrak{m}_1 \supseteq \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = 0$

每个合成因子$\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$自然是$A/\mathfrak{m}_i$上线性空间，于是合成因子a.c.c. $\iff$ d.c.c.，那么反复应用6.3就有A a.c.c. $\iff$ A d.c.c.

6.4(E)

1.1 设M是**Noetherian**$A-$模，$u \in End(M)$是自同态。如果u是满的，那么u是同构。

1.2 设M是**Artinian**$A-$模，$u \in End(M)$是自同态。如果u是单的，那么u是同构。

证：

1.1

有升链$0 \subseteq \ker u \subseteq \cdots \subseteq \ker u^n \subseteq \cdots$

于是设$\ker u^n$之后链稳定。那么$u^{n+1}(x) = 0 \iff u^n(x) = 0$，即$u(u^n(x)) = 0 \iff u^n(x) = 0$，即$\ker u \cap Imu^n = 0$

但是u是满射，于是$Imu^n = A$，于是$\ker u = 0$，故u同构。

1.2 同理。

2. 设M是$A-$模，如果每个有限生成子模的非空子集存在极大元，那么M是**Noetherian**的。

证：

任取M的一个子模N，考虑它的所有有限生成子模构成的集合（这当然不是空集），那么取出极大元N_0。若$N_0 \neq N$，取$x \in N - N_0$，考虑$N_0 + Ax$仍然是有限生成的。但是$N_0 + Ax \supset N_0$，与极大性矛盾。

故$N_0 = N$，即N有限生成。那么M的每个子模都有限生成，从而Noetherian。

3. 给定$A-$模M以及两个子模N_1, N_2，那么$M/N_1, M/N_2$都是**Noetherian (resp. Artinian)**的 $\implies M/(N_1 \cap N_2)$也是**Noetherian (resp. Artinian)**的。

证：

由于正合列$0 \to N_1/(N_1 \cap N_2) \to M/(N_1 \cap N_2) \to M/N_2 \to 0$

以及$N_1/(N_1 \cap N_2) \cong N_1N_2/N_2$

以及$0 \to N_1N_2/N_2 \to M/N_2$，由6.3即证。

4. 设M是**Noetherian**$A-$模，$\mathfrak{a}=Ann(M)$，证明$A/\mathfrak{a}$是**Noetherian**环。

说明结论对**Artinian**不正确。

证：

首先M可以被看做$A/\mathfrak{a}$模：$\bar{a}x=ax$（良定义性显然），由于乘法作用不变，因此Noetherian性质保持。

由于M的Noetherian性，它是有限生成的，设生成元为$x_1,\cdots,x_n$

那么存在映射$f:A\to M^n, a\mapsto(ax_1,\cdots,ax_n)$，且$\ker f=\mathfrak{a}$

因此$A/\mathfrak{a}$是M^n的子模。（作为$A/\mathfrak{a}-$模）

而M^n是Noetherian$A/\mathfrak{a}$-模，于是$A/\mathfrak{a}$也是，从而是Noetherian环。

对于Artinian，反例：

Noetherian空间

5. 称一个拓扑空间为**Noetherian**的，如果它的开集满足**a.c.c.**条件。或等价地闭集满足**d.c.c.**条件。证明X如果是**Noetherian**的，那么每个子空间也是**Noetherian**的，并且X是紧的。

证：

考虑某个子空间，若不是Noetherian的，则存在一个严格升链。由子空间拓扑，这诱导了X的开集严格升链，矛盾。

若X不是紧的，设U_α没有有限子覆盖。那么不断选出开集然后做并得到了永不停止的升链，与Noetherian矛盾。

6. 证明下列等价：**1.** X是**Noetherian的；2.** 每个X的开集都是紧的；**3.** 每个X的子集都是紧的。

$1 \implies 3 \implies 2$是简单的。（第一个是因为子集是Noetherian的）

$2 \implies 1.$

对于一个升链$\cdots \subset G_n \subset \cdots$，得到$\cup G_n$是开集。那么开覆盖$\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$存在有限开覆盖，于是必然稳定（在有限开覆盖的最大指标处稳定）。

7. Noetherian空间是不可约闭子空间的有限并。于是**Noetherian**空间的不可约分支是有限的。

证：不可约空间的等价表述是空间不能表示为两个真闭集的并。

记Σ为全体不能表示不可约闭子空间的有限并的闭集构成的集合族。

若结论不成立，$X \in \Sigma$，于是Σ非空。由d.c.c.等价条件，Σ存在极小元C。那么C不能是不可约的闭子空间，于是是可约的闭子空间，故可以表示为两个真闭集（子空间拓扑）的并。设为F_1, F_2

由于F_i一定是某个闭集交上C，那么它也是闭集。由C的极小性，F_i一定能表示成不可约闭子空间的有限并，那么C也可以，矛盾。

从而Σ空，于是X是不可约闭子空间的有限并。

那么利用1.E20.4推论显然。

8. 如果A是**Noetherian环，**那么$Spec(A)$是**Noetherian**空间。反过来不正确。

证：

由6.E6只需说明任何开集都是紧的。

对于任何一个开集$X-V(\mathfrak{a})$，由于$\mathfrak{a}$有限生成，设生成元为$x_1,\cdots,x_n$。那么
$X-V(\mathfrak{a})=X-\cap V(x_i)=X-\cap(X-X_{x_i})=\cup X_{x_i}$.

由1.E17.7，这说明了紧性。

反过来不正确：取$A=k[x_1,\cdots,x_n,\cdots]$，$\mathfrak{a}=(x_1^2,x_2^2,\cdots)$，那么$A'=A/\mathfrak{a}$也不是Noetherian环。（存在无限生成理想）

取$\mathfrak{p}=(\bar{x_1},\cdots)$

那么$A'/\mathfrak{p}\cong k$（在零点处的赋值映射）

另一方面$\mathfrak{R}(A')=(\bar{x_1},\cdots)$，于是这说明$\mathfrak{p}$是$A'$唯一的素理想，当然素谱是Noetherian的、

9. Noetherian环的极小素理想个数有限。更一般地素谱为Noetherian空间的环也满足此结果。

证：

由1.E20.4和6.E7~8立刻得到。

10. 设M是Noetherian$A-$模，那么$Supp(M)$是$Spec(A)$的闭Noetherian子空间。

证：

由3.E19（有限生成性显然）$Supp(M)=V(Ann(M))$于是自然是闭的。

由6.E4$A/Ann(M)$是Noetherian环，于是$Spec(A/Ann(M))$是Noetherian空间。

而$V(Ann(M)) \cong Spec(A/Ann(M))$，于是得证。

11. 设$f: A \to B$是环同态，$Spec(B)$是**Noetherian**空间，那么
$f^*: Spec(B) \to Spec(A)$是闭映射 $\iff$ f具有上升性质。

证：

$\implies$.已经在5.E10中叙述过了；

$\impliedby$. 首先对于素理想上升性质保证了$f^*(V(\mathfrak{q}_1)) \supseteq V(\mathfrak{p}_1)$，另一方面天然地有
$f^*(V(\mathfrak{q}_1)) \subseteq V(\mathfrak{p}_1)$

于是对所有素理想都有$f^*(V(\mathfrak{q})) = V(\mathfrak{q}^c)$

对于一般的闭集，$f^*(V(\mathfrak{a})) = f^*(V(r(\mathfrak{a}))) = f^*(V(\cap_{q_i, minimal}\mathfrak{q}_i))$

由6.E9，极小素理想有限。于是$$\begin{aligned} f^*(V(\mathfrak{a})) = f^*(\cup_{finite}V(\mathfrak{q}_i)) &= \cup_{finite}f^*(V(\mathfrak{q}_i)) \\ &= \cup_{finite}V(\mathfrak{q}_i^c) \end{aligned}$$仍然是闭集，于是得证。

12. 环A满足其素谱$Spec(A)$是**Noetherian**空间，那么它的素理想满足**a.c.c.** 反过来是否成立?

证：

对于一个升链$\mathfrak{p}_1 \subset \cdots$，有闭集的降链$V(\mathfrak{p}_1) \supset \cdots$，于是一定稳定。而
$V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{q}) \iff r(\mathfrak{p}) = r(\mathfrak{q}) \iff \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$，于是素理想升链稳定，得证。

反例：

$\prod^\infty k$。

7. Noetherian环

回忆Noetherian环的三个等价判定：

1. **每个理想的非空子集都存在极大元；** **2.** **每个升链都终止；** **3.** **每个理想都是有限生成的。**

7.1 Noetherian性质的保持

7.1 Noetherian在环的同态像下保持性质。（6.6）

7.2 A**是**B**的子环，**A**是Noetherian环，**B**是有限生成的**$A-$**模，那么**B**也是Noetherian的。**（6.5：B是Noetherian$A-$模，那么自然是Noetherian$B-$模）

7.3 A**是Noetherian环，**S**是乘性子集，那么**$S^{-1}A$**也是Noetherian的。**

证：注意$S^{-1}A$与A中的局限理想一一对应，那么结果显然。

7.4 **特殊地：**A**Noetherian，**$\mathfrak{p}$**是素理想，于是**$A_{\mathfrak{p}}$**是Noetherian的。**

7.5（Hilbert基定理）如果A**是Noetherian的，那么**$A[x]$**也是。**

证：

设$\mathfrak{a}$是$A[x]$的理想，那么$\mathfrak{a}$的最高次项系数构成了A中的理想$\mathfrak{i}$。于是$\mathfrak{i}$有限生成。无妨设由$a_1, \cdots, a_n$生成。

$\forall i, \exists f_i \in A[x]$使得$f_i = a_i x^{r_i} + (lower\ terms)$。取$r = \max r_i$，$f_i$生成了$\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}$。

对于任何$f \in \mathfrak{a}, f = ax^m + (lower\ terms)$；$a \in \mathfrak{i}$。若$m > r$，记$a = \sum u_i a_i, u_i \in A$。那么$f - \sum u_i f_i x^{m-r_i}$在$\mathfrak{a}$中并且次数更低。这样反复操作可以得到$f = g + h$，其中$\deg g < r, h \in \mathfrak{a}'$

设M是$1, x, \cdots, x^{r-1}$生成的$A-$模，于是$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap M) + \mathfrak{a}'$。而$M$是Noetherian的，于是$\mathfrak{a} \cap M$作为子模一定是有限生成的$A-$模，即作为理想是有限生成的。而$\mathfrak{a}'$也是有限生成的，于是$\mathfrak{a}$是有限生成的，故$A[x]$是Noetherian的。

7.5 Cor. A**Noetherian** $\implies A[[x]]$**Noetherian**。

证明是同理的，只要考虑最低次项的系数然后类似讨论。

或者利用第十章，说明Noetherian在正向极限下保持。

7.6 Cor. A**是Noetherian** $\implies A[x_1, \cdots, x_n]$**是Noetherian的**。

7.7 Cor. B**是有限生成**A**代数，那么**A**Noetherian** $\implies B$**Noetherian. 特殊地，每个域上的有限生成环和有限生成代数是Noetherian的**。

证：B是$A[x_1, \cdots, x_n]$的同态像。

7.2 Zariski引理

7.8 **设**$A \subseteq B \subseteq C$**，假定**$A$**是Noetherian环，且**$C$**作为**$A-$**代数有限生成。并且**$C$**是有限生成**$B-$**模或在**$B$**上整。那么**$B$**作为**$A-$**代数有限生成。**

证：

C作为$A-$代数有限生成，于是自然作为$B-$代数有限生成。于是由第五章的Remark，C是有限生成$B-$模 $\iff B$上整。

现在假定C是有限生成$B-$模。

设$x_1, \cdots, x_m$作为$A-$代数生成C，$y_1, \cdots, y_m$作为$B-$模生成C。

于是$x_i = \sum b_{ij} y_j$，$y_i y_j = \sum b_{ijk} y_k$。

设B_0是由b_{ij}, b_{ijk}生成的$A-$代数。那么由7.7，B_0也是Noetherian的，并且$A \subseteq B_0 \subseteq B$。

任何C中的元素都是x_i的$A-$系数多项式。设为$f(x_1,\cdots,x_n)$。将上文中x_i和y_iy_j的表达式反复代入，可将$f(x_1,\cdots,x_n)$最终化为y_j的线性组合（其中系数属于B_0）

因此C是有限生成B_0-模。

由于B_0是Noetherian环，C是有限生成B_0-模，B是C的子模。那么由6.2,6.5，C是NoetherianB_0-模，于是B是有限生成B_0-模。

而B_0-是有限生成$A-$代数，那么简单的讨论知B是有限生成$A-$代数。

7.9（Zariski Lemma） 设k是域，E是有限生成$k-$代数。如果E是域，那么它是k的有限代数扩张。

证：

设$E=k[x_1,\cdots,x_n]$。如果E不是k的代数扩张，那么可设$x_1,\cdots,x_r$在k上代数独立，并且$x_{r+1},\cdots,x_n$是$F=k(x_1,\cdots,x_r)$上代数元。

于是E是F的有限代数扩张，那么E是有限生成$F-$代数。

对$k\subseteq F\subseteq E$应用7.8，有F是有限生成$k-$代数。设$F=k[y_1,\cdots,y_s]$，其中$y_j=f_j(x_1,\cdots,x_r)/g_j(x_1,\cdots,x_r)$。

仿照Euclid的素数无限性证明，可以说明$k[x_1,\cdots,x_r]$存在无限个不可约多项式。从而存在一个与全体g_j互素的多项式，设为h。

于是$1/h$不可能由$y_1,\cdots,y_s$作为$k-$代数生成，从而引发矛盾。

因此E是k的代数扩张，于是是有限的。

7.10（Hilbert Nullstellenstaz Weak Form） 设k是域，A是有限生成$k-$代数，$\mathfrak{m}$是A的极大理想，那么$A/\mathfrak{m}$一定是k的有限代数扩张。（5.24：Zariski Lemma）

证：

在7.9中取E为$A/\mathfrak{m}$。

（7.8-7.9-7.10）的证明路径由Artin和Tate给出。

7.3 Noetherian环的准素分解

以下两个引理能够说明Noetherian环的每个理想都存在准素分解。

（注：6.E8~9,4.E1已经为我们提供了一些暗示，尽管研究$Spec$的拓扑性质仍不足以说明准素分解的存在性）

定义（不可约理想）称一个理想$\mathfrak{a}$不可约如果$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}\implies\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\ or\ \mathfrak{a}=\mathfrak{c}$

7.11 Noetherian环A中每个理想都能表示成有限个不可约理想的交。

证：

若否，那么使引理不成立的理想构成的族非空，于是存在一个极大元$\mathfrak{a}$。由于$\mathfrak{a}$不能使引理成立，那么它自身一定也不是不可约理想（否则引理自动成立）。于是
$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c},\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b},\mathfrak{a}\subset\mathfrak{c}$。

而$\mathfrak{b},\mathfrak{c}$当然不在这个族中，于是一定是有限个不可约理想的交，那么$\mathfrak{a}$也是有限个不可约理想的交，矛盾。

7.12 Noetherian环A中不可约理想都是准素的。

证：

对于某个不可约理想$\mathfrak{a}$，当然可以将问题转化至商环$A/\mathfrak{a}$，变为：

Noetherian环A中的零理想如果是不可约的那么是准素的。

如果$xy=0,y\neq 0$。

考虑$Ann(x) \subseteq Ann(x^2) \subseteq \cdots$升链一定终止，即$Ann(x^n) = Ann(x^{n+1}) = \cdots$。

若$a \in (y)$，那么$ax = 0$。如果$a \in (x^n), a = bx^n$，于是$bx^{n+1} = 0$。那么$b \in Ann(x^{n+1}) = Ann(x^n)$，从而$a = bx^n = 0$。故$(x^n) \cap (y) = 0$

那么由不可约性，以及$(y) \neq 0$，必有$(x^n) = 0$，从而说明了准素。

7.13（Main）Noetherian环中每个理想都存在准素分解。

于是第四章的所有结果都自动对Noetherian环的任何理想成立。

7.14 Noetherian环A中每个理想$\mathfrak{a}$都包含着某个$r(\mathfrak{a})^n$。

证：

设$r(\mathfrak{a})$由$x_1, \cdots, x_k$生成，$x_i^{n_i} \in \mathfrak{a}$。那么取$n = \sum(n_i - 1) + 1$，$r(\mathfrak{a})^n$由$x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k}$生成，其中$\sum r_i = n$。于是一定存在一个$r_i \geq n_i$，从而说明了这些生成元都在$\mathfrak{a}$内。因此$r(\mathfrak{a})^n \subseteq \mathfrak{a}$。

7.15 Cor. Noetherian环中幂零根一定是幂零的理想。

证：7.14的直接推论。

7.16 设A是Noetherian环，$\mathfrak{m}$是极大理想，$\mathfrak{q}$是A的任一理想。那么以下等价：

1. $\mathfrak{q}$是$\mathfrak{m}-$准素的；**2.** $r(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}$；**3.** $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$对某个$n$成立。

证：

$1 \implies 2$是准素理想的性质；$2 \implies 1$. 4.2.
$2 \implies 3$. 7.14；$3 \implies 2$. 两侧取根理想：$\mathfrak{m} = r(\mathfrak{m}^n) \subseteq r(\mathfrak{q}) \subseteq r(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$

7.17（Noetherian环的第一唯一性定理） Noetherian环A中任一理想$\mathfrak{a}$的从属素理想为$(\mathfrak{a} : x)$出现的所有素理想。

（注意它和4.5：第一唯一性定理的差别）

证：

通过将问题转化至$A/\mathfrak{a}$可以假定$\mathfrak{a}=0$。

设$\cap \mathfrak{q}_i=0$是极小准素分解，$r(\mathfrak{q}_i)=\mathfrak{p}_i$。

对于任何$(0:x)$素理想，$r(0:x)$也是素理想，那么由4.5它是从属素理想。

反过来，对于任何从属素理想$\mathfrak{p}_i$，由4.5的证明过程$\forall x\in\cap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j$，$s.t. r(0:x)=\mathfrak{p}_i$，于是当然$(0:x)\subseteq \mathfrak{p}_i$。记$\cap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j=\mathfrak{a}_i$

另一方面：$\mathfrak{q}_i$是$\mathfrak{p}_i$准素的。由7.14，存在$\mathfrak{m}$使得$\mathfrak{p}_i^m=\mathfrak{q}_i$。因而
$\mathfrak{a}_i\mathfrak{p}_i^m\subseteq \mathfrak{a}_i\cap\mathfrak{p}_i^m=\mathfrak{a}_i\cap\mathfrak{q}_i=0$。

因此可取出最小的m使得$\mathfrak{a}_i\mathfrak{p}_i^m=0$成立，设$x$是$\mathfrak{a}_i\mathfrak{p}_i^{m-1}$的非零元（当然$x\in\mathfrak{a}_i=\cap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j$）。那么$\mathfrak{p}_i x=0$，从而$\mathfrak{p}_i\subseteq(0:x)$。

于是$(0:x)=\mathfrak{p}_i$，从而完成了证明。

7.4(E)

1. 设A不是Noetherian环，Σ是全体无限生成理想构成的集合。证明Σ存在极大元，并且极大元是素理想。

作为推论得到：

（Cohen）如果一个环的素理想都是有限生成的，那么这个环是Noetherian的。

证：

极大元的存在可直接利用Zorn引理：无限生成理想升链$\mathfrak{a}_1\subseteq\mathfrak{a}_2\subseteq\cdots$的并$\mathfrak{a}=\cup\mathfrak{a}_i$如果是有限生成的，设生成元为$x_1,\cdots,x_m$，以及$x_i\in\mathfrak{a}_{m_i}$。

那么$\mathfrak{a}_{\max m_i+1}$包含全体$x_1,\cdots,x_m$。于是只能$\mathfrak{a}_{max m_i+1}=\mathfrak{a}$，矛盾。

因此其并是无限生成的，从而上界存在，应用Zorn引理即证。

对于$\mathfrak{a}$为Σ中的极大理想，如果$x, y \notin \mathfrak{a}, xy \in \mathfrak{a}$。那么$\mathfrak{a} + (x)$严格包含$\mathfrak{a}$，从而有限生成。那么可选择$\mathfrak{a}$中的有限个元素和$x$作为生成元：考虑商$(a + (x))/(x)$的生成元即可。

于是将$\mathfrak{a}$中的有限个元素生成的理想记作$\mathfrak{a}_0$，于是$\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_0 + (x) = \mathfrak{a} + (x)$，且$\mathfrak{a}_0$有限生成。

并且$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + x \cdot (\mathfrak{a} : x)$，（很容易自行检验）由于$(\mathfrak{a} : x)$严格包含$\mathfrak{a}$（$y$的存在），于是$(\mathfrak{a} : x)$有限生成，那么这个式子说明了$\mathfrak{a}$也是有限生成的，矛盾。

从而$\mathfrak{a}$是素理想。

2. A**是Noetherian环，**$f \in A[[x]]$。**证明**f**幂零** $\iff$ **它每个系数都是幂零的。**

证：

$\implies$.方向是1.E5.2的结果。

$\impliedby$. 由于$\mathfrak{R}(A)^m = 0$，那么$f^m = 0$：系数$\prod_m a_i \in \mathfrak{R}(A)^m$，从而说明幂零。

3. **设**$\mathfrak{a}$**是环**A**的不可约理想，那么以下等价：**

1. $\mathfrak{a}$**准素；2.** **对于每个乘性封闭子集**S**，**$(S^{-1}\mathfrak{a})^c = (\mathfrak{a} : x)$**对某个**$x \in S$**成立；3.** **对每个**$x \in A$**，**$(\mathfrak{a} : x^n)$**链稳定。**

证：

$1 \implies 2$. 由4.8显见。

$2 \implies 3$. 取$S = \{x^n\}$，设$(S^{-1}\mathfrak{a})^c = (\mathfrak{a} : x^n)$，由3.11.2，$(S^{-1}\mathfrak{a})^c = \mathfrak{a}^{ec} = \cup(\mathfrak{a} : x^n)$，于是当然链稳定。

$3 \implies 1$. 这和7.12的证明是完全相同的。

4. 判断下列环是否为**Noetherian**环：

1. 单位圆上处处有定义的有理函数环。

2. 全体具有非零收敛半径的幂级数构成的环。

3. 全体具有正无穷收敛半径的幂级数构成的环。

4. 全体1至$k-1$次项系数均为**0**的复系数多项式构成的环。

5. $\mathbb{C}[z,w]$的子环，满足$\partial/\partial w|_{z=0}=0$

4.1 是。考虑全体在单位圆上没有零点的多项式构成的乘性子集S，那么4.1的环同构于$S^{-1}\mathbb{C}[t]$。而Hilbert基定理保证$\mathbb{C}[t]$是Noetherian的，从而由7.3，这个环也是Noetherian的。

4.2 是。Lagarange反演保证了每个常数项非零的幂级数都存在逆元，并且如果该幂级数有非零收敛半径，其逆也有非零收敛半径。

然而每个幂级数一定具有形式$z^n g(z)$（其中$g(z)$常数项非零）

于是包含这个幂级数的理想一定包含z^n，进而可证每个理想一定具有形式(z^n)，从而Noetherian。

4.3 否。考虑$f_n=\prod_{j=n}^{\infty}(1-z^2/n^2)$，Weierstrass定理保证了收敛性。（实际上收敛至$\sin\pi z/\left[\pi z(1-z^2)\cdots(1-z^2/(n-1)^2)\right]$）

于是考虑升链$(f_1)\subseteq(f_2)\subseteq\cdots$。首先包含关系是显然的，而这个升链不可能终止，只需观察零点集合即可。因而不是Noetherian环。

4.4 是。环同构于$\mathbb{C}+(z^k)$。

由于$\mathbb{C}[z^k]\cong\mathbb{C}[z]$是Noetherian的，并且$\mathbb{C}+(z^k)$作为$\mathbb{C}[z^k]$由$\{1,\cdots,z^{k-1}\}$生成，由7.2是Noetherian的。

4.5 否。$(z,\cdots,zw^n)_{n\in\mathbb{N}}$当然不是稳定升链。

5. **设A是Noetherian环，B是有限生成$A-$代数，G是B的$A-$自同构构成的有限群。记B^G全体在G左作用下不动的元素。证明B^G是有限生成$A-$代数。**

证：由5.E12，B在B^G上整。对$A \subseteq B^G \subseteq B$应用7.8即证。

6. **如果一个有限生成环K是域，那么它是有限域。**

证：

若char$K = 0$，则$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subseteq K$。

由于K是有限生成$\mathbb{Z}$代数，进而是有限生成$\mathbb{Q}$代数。于是由7.9是$\mathbb{Q}$的有限代数扩域，从而是有限生成$\mathbb{Q}-$模。那么应用7.8有$\mathbb{Q}$是有限生成$\mathbb{Z}$代数，这当然是不可能的。

因此char$K = p > 0$，于是是有限生成F_p-代数。于是由7.9是F_p的有限代数扩张，故一定是有限域。

7. **设X是$f_\alpha(t_1, \cdots, t_n)_{\alpha \in I}$决定的仿射簇。证明存在有限子集$I_0 \subseteq I$，使得$X$由$f_\alpha(t_1, \cdots, t_n)_{\alpha \in I_0}$决定。**

证：

由于$k[t_1, \cdots, t_n]$是Noetherian的，因此f_α生成的理想是有限生成的。设生成元为$g_1, \cdots, g_n$。每个生成元一定是有限个f_α的$k-$线性组合，设它们为$f_{\alpha_{i,j}}, i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, m_i$

于是考虑这些$\alpha_{i,j}$构成的有限子集I_0。

很容易验证这就是满足要求的I_0。

8. **如果$A[x]$是Noetherian的，是否一定A也是Noetherian的?**

证：是。因为$A\cong A[x]/(x)$（作为$A[x]$模），于是是Noetherian$A[x]-$模。

那么是Noetherian$A-$模：因为$A[x]-$在其上的作用与$A-$作用一样。

9.（Noetherian的局部-整体判定） 设A满足：

1. 对每个极大理想$\mathfrak{m}$，局部环$A_{\mathfrak{m}}$是**Noetherian**的；**2.** 对每个$x\neq 0$，包含x的极大理想是有限的。

那么A是**Noetherian**环。

证：

对于任何理想$\mathfrak{a}\neq 0$，由于条件2，包含它的极大理想个数有限：设为$\mathfrak{m}_1,\cdots,\mathfrak{m}_r$。

对于$x_0\neq 0,x_0\in\mathfrak{a}$，设$\mathfrak{m}_1,\cdots,\mathfrak{m}_{r+s}$均包含$x_0$。于是存在$x_{r+i}\in\mathfrak{a},x_{r+i}\notin\mathfrak{m}_{r+i}$。

由于每个$A_{\mathfrak{m}_i}(1\leq i\leq r)$是Noetherian环，那么$\mathfrak{a}^e$是有限生成的。即存在$y_1,\cdots,y_k$使得它在$A_{\mathfrak{m}_i}$中的像生成$\mathfrak{a}^e$.（若干生成元的并）

取$\mathfrak{a}_0=(x_0,x_{r+1},\cdots,x_{r+s},y_1,\cdots,y_k)$.

那么对于任何$A_{\mathfrak{m}_i}(1\leq i\leq r)$，上述生成元的像都生成$\mathfrak{a}^e$

同样的，对于$A_{\mathfrak{m}_{r+i}}(1\leq i\leq s)$，显然$\mathfrak{a}^e$为$(1)$，而$x_{r+i}$在其中的像可逆，于是也生成了$\mathfrak{a}^e$

对于其它极大理想做局部化后显然$\mathfrak{a}^e$为(1)，而x_0不被$\mathfrak{m}$包含，因而可逆，于是也成了$\mathfrak{a}^e$.

因而对任何极大理想$\mathfrak{m}:A\to A_{\mathfrak{m}}$，$\mathfrak{a}_0^e=\mathfrak{a}^e$. 由3.8即说明$\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a}$：考虑$A/\mathfrak{a}_0$即可。

于是$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_0$是有限生成的，从而说明了$A$是Noetherian环。

10. 设M是**Noetherian**$A-$模，证明$M[x]$是**Noetherian**$A[x]-$模。

证：

这和Hilbert基定理的证明是几乎相同的。

11. $A_{\mathfrak{p}}, \forall \mathfrak{p}\ prime$**是Noetherian的，**$A$**是否也是Noetherian的？**

证：否。很不幸Noetherian不是一个局部性质（当然7.E9的判定也暗示了这一点）

反例：$\prod^{\infty} k$

12. **设**A**是环，**B**是忠实平坦的**$A-$**代数，如果**B**是Noetherian的，那么**A**也是。**

证：由3.E16.1，对于A中的理想升链，这也诱导出了B中升链：$\mathfrak{a}_1^e \subset \cdots$，于是它一定稳定。设$\mathfrak{a}_n^e = \cdots$，两侧取拉回即有$\mathfrak{a}_n^{ec} = \cdots$，即$\mathfrak{a}_n = \cdots$，从而得证。

13. **设**$f: A \to B$**是有限型的（即**B**是有限生成**$A-$**代数）。**$f^*: Spec(B) \to Spec(A)$**是拉回，那么**f^***的纤维是**$Spec(B)$**的Noetherian子空间。**

3.E21.4指出纤维同构于$Spec(\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B)$

由于有限生成性，B一定是$C = A[t_1, \cdots, t_m]$的商。那么
$\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B \cong \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A C \otimes_C B \cong \kappa[t_1, \cdots, t_m] \otimes_C B.$

它是$\kappa[t_1, \cdots, t_m] \cong \kappa[t_1, \cdots, t_m] \otimes_C C$的同态像，而前者当然Noetherian。于是这就说明了$\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B$一定是Noetherian环，从而得证。

Strong Nullstellenstaz

14. 设k是代数闭域，$A=k[t_1,\cdots,t_n]$，$\mathfrak{a}$是其理想，那么$I(Z(\mathfrak{a}))=r(\mathfrak{a})$

证：$r(\mathfrak{a})\subseteq I(Z(\mathfrak{a}))$是显然的。反过来，设$f\notin r(\mathfrak{a})$，那么存在$\mathfrak{p}$包含$\mathfrak{a}$且$f\notin\mathfrak{p}$。记$\bar{f}$为$f$在$B=A/\mathfrak{p}$中的像，$C=B_f=B[1/\bar{f}]$。

设C的一个极大理想为$\mathfrak{m}$。由于C是有限生成$k-$代数，那么由7.9$C/\mathfrak{m}$也是有限生成$k-$代数，于是是k的代数扩张，于是是k。

设$x_1,\cdots,x_n$是$t_1,\cdots,t_n$在$C/\mathfrak{m}$中的像。可以验证$f(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$，且
$x_1,\cdots,x_n\in Z(\mathfrak{a})$。

于是得证。

15.（自由-平坦等价） 设A是**Noetherian**局部环，$\mathfrak{m}$是极大理想，k是剩余域。M是有限生成$A-$模，那么以下等价：

1. M自由；**2.** M平坦；**3.** $\mathfrak{m}\otimes M\to A\otimes M$是单的；**4.** $Tor_1^A(k,M)=0$

证：

1 $\implies$ 2. 自由模平坦：因为A当然是平坦模，而平坦模的直和仍然平坦。

2 $\implies$ 3. 平坦模的定义。

3 $\implies$ 4. 考虑正合列$0\to\mathfrak{m}\otimes M\to A\otimes M\to k\otimes M\to 0$，这当然意味着
$Tor_1^A(k,M)=0$

4 $\implies$ 1. 设$x_1,\cdots,x_n$满足它们的像构成了$M/\mathfrak{m}M$的$k-$基。（注意有限生成保证了有限维）

那么由2.8，$x_1,\cdots,x_n$生成了M。

设F是自由$A-$模，基为$e_1,\cdots,e_n$。那么$\phi:F\to M:e_i\mapsto x_i$诱导了模同态。

记$E=\ker\phi$，于是有正合列$0\to E\to F\to M\to 0$，于是
$0\to k\otimes_A E\to k\otimes_A F\to k\otimes_A M\to 0$是正合列。

然而$k\otimes_A F,k\otimes_A M$是$k$上相同维数的线性空间，于是只有$k\otimes_A E=0$，从而由Nakayama引理的推论2.E3：$E=0$。（相当容易验证条件成立）

于是$F\cong M$

16.（平坦=局部自由） A是**Noetherian**环，M是有限生成$A-$模，那么以下等价：

1. M是平坦$A-$模；**2.** $M_{\mathfrak{p}}$是自由模；**3.** $M_{\mathfrak{m}}$是自由模。

证：

只需注意$M_{\mathfrak{p}}$是有限生成$A_{\mathfrak{p}}$模，后者是Noetherian局部环，那么M_p自由$\iff$平坦，从而由3.10平坦的局部性得证。

Noetherian环上模的准素分解

17. 设A是环，M是**Noetherian**$A-$模，那么每个子模都存在准素分解。

这只需完全模仿7.3节的内容。

18. 设A是**Noetherian**环，$\mathfrak{p}$是素理想，M是有限生成$A-$模。证明以下等价：

1. $\mathfrak{p}$从属于零模；**2.** $\exists x\in M,Ann(x)=\mathfrak{p}$；**3.** 存在$M$的子模同构于$A/\mathfrak{p}$。

作为结论得到：存在一条如下的链$0=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_r=M$，且
$M_i/M_{i-1}\cong A/\mathfrak{p}_i$。

证：

$1 \iff 2$. 4.E22:第一唯一性定理的模版本。

$2 \implies 3$. $\phi : A \to M : a \mapsto xa$，于是$Im(\phi) \cong A/\mathfrak{p}$是$M$的子模。

$3 \implies 2$. 设$N \cong A/\mathfrak{p}$。于是存在单同态$A/\mathfrak{p} \to M$。那么记$x = \phi(1)$。于是单性保证$Ann(x) = \mathfrak{p}$。

对于最后一部分：

首先可以取出同构于某个$A/\mathfrak{p}$的子模M_1，然后对M/M_1等等归纳进行操作，最后得到一个升链$0 = M_0 \subset \cdots \subset M_r$。由6.5$M$是Noetherian$A-$模，于是升链一定终止，不妨设就在$r$终止。若$M/M_r \neq 0$，那么当然可以取出同构于$A/\mathfrak{p}$的子模，这和终止条件矛盾，故只有$M_r = M$，从而得到了结果。

19. 设$\mathfrak{a}$是**Noetherian**环A的理想，以及两个极小的不可约理想的分解：$\mathfrak{a} = \cap_{i=1}^{r} \mathfrak{b}_i = \cap_{i=1}^{s} \mathfrak{c}_i$。证明：$r = s$，并且适当重排顺序后$r(\mathfrak{b}_i) = r(\mathfrak{c}_i)$

证：

只需注意到这是一个极小准素分解，那么结论有第四章结果自动成立。

Noetherian环素谱的可构造子集

20. 设X是拓扑空间，$\mathscr{F}$是最小的子集族，满足它包含全体开集并且在补和有限交下封闭。

20.1 证明$E \in \mathscr{F} \iff E$是如下形式集合的有限并：$U \cap C$，其中U是开的C是闭的。

20.2 如果X是不可约的，$E \in \mathscr{F}$，证明$\bar{E} = X \iff E$包含一个非空开集。

证：

20.1 首先非常容易验证题目中给出的子集族满足要求。

同时对于任何$\cup(U_i \cap C_i)$，它当然能从开集中构造得到，于是命题立刻得证。

20.2 只需证明 $\implies$ 方向。

那么$X=\bar{E}=\cup\overline{U_i \cap C_i}$。由于不可约，它不可能是两个（进一步：有限个：这里需要一些讨论）真闭集的并，于是可设$\overline{U_i \cap C_i}=X$。而$\overline{U_i \cap C_i} \subseteq \overline{U_i} \cap \overline{C_i}$。从而只能$\overline{U_i}=X=C_i$，于是$E \supseteq U_i$，得证。

21. X**是Noetherian空间，**$E \subseteq X$。**证明**$E \in \mathscr{F} \iff$ **对于每个不可约闭集**X_0**，要么**$\overline{E \cap X_0} \neq X_0$**，要么**$E \cap X_0$**包含**$X_0$**中的一个（子空间拓扑下的）开集。**

$\mathscr{F}$**中的元素称为**X**的可构造子集。**

证：

$\implies$. 如果$\overline{E \cap X_0}=X_0$，那么7.E20的结果立刻推出$E \cap X_0$包含$X_0$的一个开集。

$\impliedby$. 如果$E \notin \mathscr{F}$，那么存在一个非空的闭集族：其中的元素为闭集$X' \subseteq X$使得$E \cap X' \notin \mathscr{F}$。

于是由Noetherian性这个族存在一个极小元X_0. 那么X_0如果不是不可约闭子空间，则一定能表示成两个真闭集的并。（注意这里是闭子空间，子空间拓扑的闭集仍然是闭集）

于是对于这两个闭集Y, Z，都有$E \cap Y, E \cap Z \in \mathscr{F}$，那么当然$E \cap X_0=(E \cap Y) \cup (E \cap Z) \in \mathscr{F}$，从而矛盾。因此$X_0$是不可约闭子空间。

于是上述条件能够推出（利用7.E20）$E \cap X_0 \in \mathscr{F}$，从而矛盾。

22. **设**X**是Noetherian空间，**$E \subseteq X$。**证明**E**是开集** $\iff$ **对于每个不可约闭子空间**X_0**，要么**$E \cap X_0=\varnothing$**，要么**$E \cap X_0$**包含**X_0**的一个非空开集。**

证：

$\Longrightarrow$. $E\cap X_0$是X_0中的开集。

$\Longleftarrow$. 如果E不是开集，那么存在一个非空闭集族使得其中元素X'满足$X\cap E$非空并且不是X'中开集。

那么存在一个极小元X_0，如果它不是不可约闭子空间，设$X_0=Y\cap Z$，那么$E\cap Y$，$E\cap Z$一定是Y,Z中的开集。设它们分别为$U\cap Y,V\cap Z$。

那么$E\cap X=(U\cup V)\cap(Y\cup Z)=(U\cup Y)\cap X_0$，于是也是$X_0$中开集，矛盾。

因此X_0是不可约闭子空间，于是$E\cap X_0$非空那么一定包含一个非空开集，设为U。于是考虑$C=X_0-U$，由极小性当然$E\cap C$是C中开集（C是X_0中闭集于是是X中闭集），那么类似上述讨论得到$E\cap X_0$是一个X_0中开集，矛盾。

因此E是开集。

23. 设A是**Noetherian**环，$f:A\to B$是有限型的环同态（B是有限生成$A-$代数，于是也是**Noetherian**环）。记$X=Spec(A),Y=Spec(B):f^*:Y\to X$。那么$Y$的可构造子集在$f^*$下的像是$X$的可构造子集。

证：

只需考虑$E=U\cap C$的像，进一步地设$C=V(\mathfrak{a})$，我们考虑$B/\mathfrak{a}$。过渡到商环：

因此可假设E是Y中的开集。由于Y是Noetherian的，E是紧的（6.E6），于是一定是有限个$Spec(B_g)\cong X_g$的并。于是取局部化我们只需要考虑$E=Y$的情况。

现在考虑$f^*(Y)$，利用7.E21的判别法。设X_0是不可约闭子空间，$f^*(Y)\cap X_0$在X_0中稠密，那么我们希望证明$f^*(Y)\cap X_0$包含某个X_0的非空开集。

由于$f^*(Y)\cap X_0=f^*(f^{*-1}(X_0))$。注意$Spec(A)$的不可约子空间一定同胚于$Spec(A/\mathfrak{p}),\mathfrak{p}$ minimal。于是$f^{*-1}(X_0)=Spec(A/\mathfrak{p}\otimes_A B)$。

那么这相当于考虑$f^*:Spec(A/\mathfrak{p}\otimes_A B)\to Spec(A/\mathfrak{p})$，于是可以假定$A$是整环，且$f$是单射。

设Y有不可约分支$Y_1,\cdots,Y_n$，只需说明每个$f^*(Y_i)$包含了X的某个开集。同样假定$f^*(Y_i)$在X中稠密（如不稠密则判别法已自动满足）

因此这将问题转化成了整环之间的映射：$f: A \to B \twoheadrightarrow B/\mathfrak{p}$。由于$f^*(Y)$在$X$中稠密，由1.21：$\ker f \subseteq \mathfrak{R} = 0$，从而这将问题转化为了整环之间的单射，并且有限型这一性质没有受到影响。

于是现在问题转化为了5.E21的情况：

存在一个s使得对于任何给定的代数闭域Ω，$\phi: A \to \Omega, \phi(s) \neq 0$总能被延拓到$B$上成为$\tilde{\phi}: B \to \Omega$。由于这两个映射的像都是域的子环，于是是整环，于是核均为素理想，分别设为$\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$。其中$\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$。那么$\phi(s) \neq 0 \implies s \notin \mathfrak{p}$。

于是5.E21指出$\forall \mathfrak{p} \in X_s$，$\mathfrak{p} \in f^*(Y)$，即$X_s \subseteq f^*(Y)$。

另一方面$s \neq 0$，于是s不是幂零元，因而$X_s \neq \varnothing$，判别法条件满足，于是得证。

24. 保持7.E23记号和条件不变，f^*是开映射 $\iff$ f有下降性质。

证：$\implies$.方向是5.E10中已经讨论过的；

$\impliedby$. 如果f有下降性质，正如7.E23中做过那样，只需证明$E = f^*(Y)$是开的（因为每个一般开集都是紧的，从而是有限个主开集的交，于是只需考虑分式化后的环）

下降条件表明$\mathfrak{p} \in E, \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p} \implies \mathfrak{p}' \in E$，即如果$X_0 = V(\mathfrak{p}_0)$是不可约闭子空间，且$X_0$和$E$有交（即$\exists \mathfrak{p} \in E, \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_0$），那么$E \cap X_0$在$X_0$中是稠密的：因为$\mathfrak{p}_0$的闭包正是$V(\mathfrak{p}_0) = X_0$，而下降条件保证了$\mathfrak{p}_0 \in E$。

由7.E23，$f^*(Y)$是可构造的，于是$f^*(Y) \cap X_0$是X_0的可构造子集。那么由7.E20.2，$f^*(Y) \cap X_0$包含X_0的一个非空开集。

综合上述，由7.E22知：$f^*(Y)$是开的。

于是f^*是开映射，命题得证。

25. 设A是**Noetherian**环，$f:A\to B$，B是有限生成$A-$代数，并且是一个平坦$A-$模。那么$f^*:Spec(B)\to Spec(A)$是开映射。

证：平坦保证了下降性质成立（5.E11）；有限型保证了下降性质 $\Longrightarrow$ 开映射（7.E24）

Grothendieck群

26. 设A是**Noetherian**环，$F(A)$是全体有限生成$A-$模的同构类。C是一个$F(A)$生成的自由交换群。

对于每个段正合列$0\to M'\to M\to M''\to 0$，我们得到一个形如$(M')-(M)+(M'')$的元素，设这些元素生成的子群为D。那么C/D称为A的**Grothendieck**群，记作$K(A)$。

对于一个有限生成模M，记$\gamma(M)$（或$\gamma_A(M)$）为其在$K(A)$中的像。

26.1 证明$K(A)$满足如下泛性质：对于每个有限生成$A-$模上定义的$G-$值加性函数，存在唯一的同态$\lambda_0:K(A)\to G$，满足$\lambda(M)=\lambda_0(\gamma(M))$。

26.2 证明$K(A)$由$\gamma(A/\mathfrak{p})$形式的元素生成。

26.3 如果A是域，或更一般地：**PID**，那么$K(A)\cong\mathbb{Z}$

26.4 设$f:A\to B$是有限环同态，即B是有限生成$A-$模，证明纯量局限诱导了一个群同态：$f_!:K(B)\to K(A)$：$f_!(\gamma_B(N))=\gamma_A(N)$。如果$g:B\to C$是有限环同态，证明$(g\circ f)_!=f_!\circ g_!$

证：

26.1 显然。

26.2 考虑7.E.18，结果显然。

26.3 由于PID环是Noetherian的，那么由PID环上有限生成模的结构定理知，$K(A)$由自由模和循环p模的像生成。

任何循环p模都具有形式$A/(p^e)$，然而正合列$0 \to A \xrightarrow{a \mapsto p^e a} A \to A/(p^e) \to 0$保证了$A/(p^e)$在$K(A)$中的像为0.

因此只需考虑自由模，可以验证$A^N \mapsto N$的确诱导出了到$\mathbb{Z}$的单同态（只需注意到这个映射实际上是在取模的秩），于是$K(A) \cong \mathbb{Z}$。

26.4 良定义性：若$\gamma_B(M) = \gamma_B(N)$，那么$(M) - (N)$一定能表示成有限个$(P') - (P) + (P'')$的和。于是将其视作$A-$模也是如此，从而$\gamma_A(M) = \gamma_A(N)$，于是良定义性得证。

同态与结合律：同理。有限同态保证了模的有限生成性。

27. 设A是**Noetherian**环，$F_1(A)$是全体平坦$A-$模的同构类，同理**26**得到群$K_1(A)$。记$\gamma_1(M)$为(M)在$K_1(A)$中的像。

27.1 证明$A-$模的张量积诱导了$K_1(A)$上的交换环结构：$\gamma_1(M) \cdot \gamma_1(N) = \gamma_1(M \otimes_A N)$，乘法单位元为$\gamma_1(A)$

27.2 证明张量积诱导了$K(A)$上的$K_1(A)$模结构：M是平坦模，$\gamma_1(M) \cdots \gamma(N) = \gamma(M \otimes_A N)$。

27.3 如果A是局部环，$K_1(A) \cong \mathbb{Z}$

27.4 设$A \to B$是环同态，B是**Noetherian**环。证明纯量扩张诱导了$f^! : K_1(A) \to K_1(B)$：$f^!(\gamma_1(M)) = \gamma_1(B \otimes_A M)$

（M是有限生成平坦$A-$模，则$B \otimes_A M$是有限生成平坦$B-$模）

同样，对于$g : B \to C$，C**Noetherian**环，$(f \circ g)^! = f^! \circ g^!$

27.5 设$f : A \to B$是有限环同态，B是**Noetherian**环，那么$f_!(f^!(x)y) = xf_!(y) (x \in K_1(A), y \in K(B))$

即：通过纯量局限将$K(B)$视作$K_1(A)-$模，那么$f_!$是$K_1(A)-$模同态。

27.6(Remark.) 由于$F_1(A) \subseteq F(A)$，当然存在一个同态$\epsilon : K_1(A) \to K(A)$。如果$A$有限维且正则，那么$\epsilon$是同态（见**11**章）

8. Artin环

8.1 性质

8.1（Artin环零维） Artin环A中素理想都是极大的。

证：设$\mathfrak{p}$是素理想，则$B = A/\mathfrak{p}$是Artin整环。对于$x \in B, x \neq 0$，由d.c.c.存在n使得$(x^n) = (x^{n+1})$，故$x^n = x^{n+1}y$成立。

整环保证了$xy = 1$，从而B是域，于是$\mathfrak{p}$极大。

8.2 Cor. Artin环中大根和小根相同。

8.3 Artin环中极大理想个数有限。

证：考虑全体极大理想的有限交构成的理想族，Artin性保证存在极小元，设为$\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$。那么$\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n, \forall\ maximal\ \mathfrak{m}$。

于是由包容引理1.11，$\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}_i$对某个$i \in \{1, \cdots, n\}$成立，于是$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$。于是这就说明极大理想个数有限。

8.4 Artin环中幂零根一定是幂零的理想。（Recall 7.15）

证：

d.c.c.条件保证了$\mathfrak{N}^k = \mathfrak{N}^{k+1} = \cdots$对某个$k$成立。

设这个稳定的理想为$\mathfrak{a}$，假定$\mathfrak{a} \neq 0$。记Σ为全体使得$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq 0$的理想$\mathfrak{b}$构成的族，它当然非空。于是存在一个极小元，设为$\mathfrak{c}$。由$\Sigma$定义，存在$x \in \mathfrak{c}, x\mathfrak{a} \neq 0$，那么$(x)\mathfrak{a} \neq 0$，且$(x) \subseteq \mathfrak{c}$，于是$\mathfrak{c} = (x)$。

然而$(x\mathfrak{a})\mathfrak{a} = x\mathfrak{a}^2 = x\mathfrak{a} \neq 0$，且$x\mathfrak{a} \subseteq (x)$，于是$x\mathfrak{a} = (x)$，从而$x = xy$对某个$y \in \mathfrak{a}$成立。于是$x = xy = xy^2 = \cdots$。

但是$y \in \mathfrak{a} = \mathfrak{R}^k \subseteq \mathfrak{R}$。于是$y$是幂零元，从而$x = xy^n = 0$，矛盾。

因此$\mathfrak{a} = 0$。

定义（Krull维数）称素理想链$\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$的长度为$n$，记一个环$A$的Krull维数$\dim A$为其中全体素理想链长度的上确界。于是$\dim A \in \mathbb{Z}^+ \cup \{+\infty\}$

例：$\dim k = 0, \dim \mathbb{Z} = 1$

8.5 Artin环 $\iff$ 0维Noetherian环。

证：$\implies$. 8.1指出Artin环是0维的。设$\mathfrak{m}_i (1 \leq i \leq n)$是其全体极大理想。那么$\prod m_i^k \subset (\cap \mathfrak{m}_i)^k = \mathfrak{R}^k = 0$。于是由6.11，它是Noetherian的。

$\impliedby$. 在Noetherian环A中零理想当然存在准素分解。A存在有限个极小素理想，并且$\dim A = 0$要求它们都是极大的。于是$\mathfrak{R} = \cap \mathfrak{m}_i$，从而由7.15：$\mathfrak{R}^k = 0$，于是接下来的证明同 $\implies$.方向，利用6.11得到它是Artin的。

8.2 Artin局部环

例：对于Artin局部环A，极大理想$\mathfrak{m}$是唯一的素理想。于是$\mathfrak{m} = \mathfrak{R}$，从而$\mathfrak{m}^n = 0$。$\mathbb{Z}/(p^n)$是一个这样的环的例子。

8.6（Noetherian局部环分类定理） 设A是**Noetherian局部环，**$\mathfrak{m}$**是其极大理想，那么以下两者恰有其一成立：**

Case 1. $\mathfrak{m} \supset \cdots \mathfrak{m}^2 \supset \cdots$构成了无限长严格降链。

Case 2. 对某个n，$\mathfrak{m}^n = 0$成立，此情况等价于A是**Artin**局部环。

证：

如果$\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$对某个$n$成立，那么由Nakayama引理（2.6）$\mathfrak{m}^n = 0$。

对于任何A的素理想$\mathfrak{p}$，$\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{p}$。于是两侧取根理想，得到$\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$，于是$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$，即$\mathfrak{p}$是唯一的素理想。从而$A$当然是Artin局部环。

8.7 （Artin环结构定理）每个Artin环一定是有限个Artin局部环的直和，反过来也成立。这种分解是唯一的。

证：

设$\mathfrak{m}_i (1 \leq i \leq n)$是$A$的全体极大理想，正如8.5的证明中用到的，$\prod \mathfrak{m}_i^k = 0$对某个$k$成立。

由1.16，极大理想之间的互素性保证了$\mathfrak{m}_i^k$也是两两互素的。

那么由1.10，$\cap \mathfrak{m}_i^k = \prod \mathfrak{m}_i^k$，于是由1.10，$A \to \prod A/\mathfrak{m}_i^k$是同构。并且$A/\mathfrak{m}_i^k$明显是局部环（若否，设$\mathfrak{m}_i^k \subseteq \mathfrak{m}_j$，两侧取根理想即矛盾），于是结果得证。

反过来，如果$A \cong \prod A_i$是有限个Artin局部环的直和，它首先一定是Artin的。

对每个i，存在$\phi_i : A \to \prod A_i \twoheadrightarrow A_i$，记$\mathfrak{a}_i = \ker \phi_i$。

同样，由1.10这些$\mathfrak{a}_i$两两互素，且$\cap \mathfrak{a}_i = 0$。

那么设$\mathfrak{q}_i$是唯一的A_i中的素理想，$\mathfrak{p}_i = \phi_i^{-1}(\mathfrak{q}_i)$，那么$\mathfrak{p}_i$是素的，于是也是极大的。而$\mathfrak{q}_i$是幂零的理想，于是$\mathfrak{a}_i$是$\mathfrak{p}_i-$准素理想：先取拉回，再利用4.2. 因此$\cap \mathfrak{a}_i$是准素分解。

由于$\mathfrak{a}_i$两两互素，于是$\mathfrak{p}_i$也是（1.16）。于是每个$\mathfrak{p}_i$都是一个孤立的素理想，从而孤立准素分支$\mathfrak{q}_i$被唯一决定（第二唯一性定理），于是唯一性得证

Remark. 尽管如此，只有一个素理想的环并不一定是**Noetherian**的，于是不一定是**Artin**的。

取$A=k[x_1,\cdots],\mathfrak{a}=(x_1,x_2^2,\cdots,x_n^n,\cdots)$，$B=A/\mathfrak{a}$仅有一个素理想：$(x_1,x_2,\cdots)$的像。但是它不**Noetherian**，因为这个素理想并不有限生成。

Zariski切空间：考虑局部环A，极大理想$\mathfrak{m}$，剩余域$k=A/\mathfrak{m}$。$A-$模$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$被$\mathfrak{m}$所零化，于是具有$k=A/\mathfrak{m}-$线性空间结构。

如果$\mathfrak{m}$有限生成（作为$A-$模），那么生成元在$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$中的像也能作为$A/\mathfrak{m}-$有限生成。因此$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$有限。

8.8 对于**Artin**局部环A，以下等价：

1. 每个理想都是主理想；**2.** 唯一的极大理想（素理想）是主理想；**3.** $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)\leq 1$

证：$1\implies 2\implies 3.$显然。

$3\implies 1.$

如果$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=1$，由2.8（取$M=\mathfrak{m}$），$\mathfrak{m}$是主理想。设$\mathfrak{m}=(x)$，对于任何理想$\mathfrak{a}$，且非0或整个环，一定有$\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{m}=\mathfrak{R}$，那么对于充分大的$k$：$\mathfrak{a}^k\subseteq\mathfrak{m}^k=\mathfrak{R}^k=0$。于是一定存在指标$r$：使得$\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{m}^r$，但是$\mathfrak{a}\not\subseteq\mathfrak{m}^{r+1}$。

即存在$y\in\mathfrak{a}$，$y=ax^r,y\notin x^{r+1}$。因此$a\notin(x)$，从而a使一个单位。因此$x^r\in\mathfrak{a}$，故$\mathfrak{m}^r\subseteq\mathfrak{a}$，于是$\mathfrak{a}=\mathfrak{m}^r=(x^r)$

如果$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=0$，那么$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^2$。由Nakayama引理（2.6）就有$\mathfrak{m}=0$，即$A$是域。

8.3(E)

1. 设$\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n=0$**是Noetherian环中零理想的准素分解，**$r(\mathfrak{q}_i)=\mathfrak{p}_i$。设$\mathfrak{p}_i^{(r)}$是$r$**次形式幂。（4.E13）证明对于每个指标**$i$**，存在**$r_i$**使得**$\mathfrak{p}_i^{(r_i)}\subseteq\mathfrak{q}_i$。

证：

如果$\mathfrak{q}_i$是一个孤立准素分支，$A_{\mathfrak{p}_i}$是Artin局部环：因为它是Noetherian局部环，并且每个素理想极大（$\dim A_{\mathfrak{p}_i}=0$）。那么对于它的极大理想$\mathfrak{m}_i$当然有$\mathfrak{m}_i^r=0$对于充分大$r$成立。于是对于这样的充分大$r$当然有$\mathfrak{q}_i\supseteq\mathfrak{p}_i^{(r)}$：因为$S_{\mathfrak{p}_i}(0)$是最小的$\mathfrak{p}_i$准素理想（当$\mathfrak{p}_i$极小时）（4.E11）

如果$\mathfrak{q}_i$是一个嵌入准素分支，那么$A_{\mathfrak{p}_i}$不是Artinian的（因为$\mathfrak{p}_i$不是极小的，从而$\dim A_{\mathfrak{p}_i}\geq 1$）。而它是Noetherian局部环，于是由8.6，$\mathfrak{m}_i^r$是无穷长降链，因此$\mathfrak{p}_i^{(r)}$也是无穷长降链。

由于对于$\mathfrak{q}_i$，一定存在充分大r使得$\mathfrak{p}_i^r\subseteq\mathfrak{q}_i$。

由于$\mathfrak{p}_i^{(r)}$是最小的包含$\mathfrak{p}_i^r$的$\mathfrak{p}_i$准素理想（？）？

2. 设A**是Noetherian环，证明以下等价：**

1. A**是Artin环；2.** $Spec(A)$**离散且有限；3.** $Spec(A)$**离散。**

证：

$1\implies 2.$ 此时全体素理想都是极大的，而Artinian环极大理想个数有限（8.3），于是有$Spec(A)$有限。同时每个点都是闭点，于是有限性也保证了每个点都是开的，于是$Spec(A)$是离散的。

$2\implies 3.$显然。

$3\implies 1.$ 如果$Spec(A)$离散，那么每个点都是闭的，从而每个素理想都是极大的，即$\dim A=0$。由8.5这个环是Artin的。

3. 设k是域，A是有限生成$k-$代数。证明以下等价：

1. A是Artin的；**2.** A是有限$k-$代数（有限生成$k-$模）

证：$1 \implies 2.$，由于A是有限个Artin局部环的直和，因此考虑每个直和因子不影响结果，于是不妨A是Artin局部环。那么由Zariski零点定理，$A/\mathfrak{m}$是k的有限代数扩张，设$A/\mathfrak{m} \cong F$。

由7.E18，A当然是有限生成$A-$模，于是存在一个有限长的升链$0 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_r = A$，并且每个因子$\cong A/\mathfrak{p}_i$，而后者只有一种可能：即$A/\mathfrak{m} \cong F$

因此计算维数立刻可知A是有限维k线性空间（F是有限维k线性空间），从而是有限生成k代数。

$2 \implies 1.$ 由于A的理想是$k-$线性子空间，由6.10满足d.c.c.，自然得到Artin性。

4. 设$f : A \to B$是有限型环同态。那么对于如下**4**个性质：

1. f是有限的；**2.** f^*的纤维是$Spec(B)$的离散子空间；**3.** 对于每个A的素理想$\mathfrak{p}$，$B \otimes_A \kappa(p)$是有限$\kappa(\mathfrak{p})-$代数（$\kappa(\mathfrak{p})-$有限生成模）；**4.** f^*的纤维是有限的。

那么：$1 \implies 2 \iff 3 \implies 4.$

证：

$1 \implies 3.$ 设B作为$A-$模由n个元素生成。那么当然$B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$是有限$\kappa(\mathfrak{p})$代数：非常容易检验它由$x_i \otimes_A 1$生成。

$3 \implies 2.$

由8.E3，$B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$是Artin环，那么由8.2得到素谱有限。

$2 \implies 3.$

由于f是有限型的，可以验证$B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$是有限生成$\kappa(\mathfrak{p})-$代数。

于是由7.7它是Noetherian环，那么由8.E2得到它是Artin环，于是由8.E3得到它是有限$\kappa(\mathfrak{p})-$代数。

$3 \implies 4.$

由8.E3，$B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$是Artin环，由8.E2得到素谱有限。

5. 回到**Noether**正规化引理（**5.E16**），证明X是L的有限覆叠：即L中一点到X的原像是有限且有界的。

6. 设A是**Noetherian**环，$\mathfrak{q}$是一个$\mathfrak{p}-$准素理想。考虑$\mathfrak{q}$到$\mathfrak{p}$的准素理想链。证明这样的链长度有上界，并且极大链长度相等。

证：

取根理想立刻有这样的准素理想链移动均由$\mathfrak{p}-$准素理想组成。

Noetherian条件保证了任何这样的链都一定是有限长的。

由于$\mathfrak{q}$到$\mathfrak{p}$的理想和$(A/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$的理想有一一对应，并且准素在商和局部化（4.8）下都保持。

于是我们现在回到了Noetherian局部环。由于$\mathfrak{p}^n \subseteq \mathfrak{q}$，于是$(A/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$中的极大理想$\mathfrak{m}$满足$\mathfrak{m}^n = 0$，于是由8.6（Noetherian局部环分类），它是Artin局部环。

那么对于任何$(A/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$中理想都有$\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{m}$，取根理想知$r(\mathfrak{b}) = \mathfrak{m}$，于是由4.2知它是$\mathfrak{m}-$准素。（因此这实际上说明了$\mathfrak{q}$到$\mathfrak{p}$之间的理想全都是准素的？？！）

那么上界当然存在，极大链长度相等是合成列的直接推论。