Introduction to Commutative Algebra - Part4.

9. 离散赋值环(DVR)和Dedekind整环

9.0 引言

在上一章中我们实际上考虑的是0维Noetherian环这一特殊情况，接下来我们考虑1维Noetherian整环（第二简单的情况：非零理想都是极大的），并且指出这和代数数论的重要结构Dedekind整环有着重要关联。

8.1（1维Noetherian环的唯一分解定理）设A是1维Noetherian整环，那么每个非零理想$\mathfrak{a}$可以唯一的表示成若干根理想互异的准素理想的积。

证：

Noetherian环保证了准素分解存在，设为$\mathfrak{a} = \cap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$。由于$\dim A = 1$，且为整环，那么$\mathfrak{p}_i = r(\mathfrak{q}_i)$是两两不同的极大理想。于是它们两两互素。于是由1.16$\mathfrak{q}_i$两两互素。从而由1.10 $\mathfrak{a} = \cap\mathfrak{q}_i = \prod\mathfrak{q}_i$。

反过来如果$\mathfrak{a} = \prod\mathfrak{q}_i$，那么和上段同样的论述能够说明$\mathfrak{a} = \cap\mathfrak{q}_i$：于是是一个极小准素分解。于是4.11（第二唯一性定理）说明了唯一性。

如果A是1维Noetherian整环，并且每个准素理想都是素理想的幂，那么由9.1这样的环可以将理想如同整数那样分解成素理想的乘积。

那么对于一个素理想$\mathfrak{p}$作局部化得到$A_\mathfrak{p}$，得到的仍然是1维Noetherian整环，且准素理想仍然是素理想的幂，于是其中的每个理想都是极大理想的幂。（9.1中就将看到DVR具有这样的性质）

9.1 离散赋值环

对于一个域K，称K的离散赋值为满同态$v: K^* \to \mathbb{Z}$。如同5.4(E)中讨论过的，满足$v(x) \geq 0$称为v的赋值环。另外有时会补充定义$v(0) = +\infty$。

两个常用的例子分别是$\mathbb{Q}$的p-adic赋值（赋值环为$\mathbb{Z}_{(p)}$）和$k(x)$的$f-$adic赋值，其中$f \in k[x]$不可约（赋值环为$(k[x])_{(f)}$

定义（DVR）称一个整环为离散赋值环如果存在其分式域的离散赋值v，并且赋值环恰好为这一整环。

由5.18，DVR一定是局部环，并且$\mathfrak{m}$正是满足赋值严格大于0的元素构成的理想。

显然$v(x) = v(y) \iff v(xy^{-1}) = 0 \iff (x) = (y)$。

对于A的非零理想$\mathfrak{a}$，存在一个最小的整数k，使得$v(x) = k$对某个$x \in \mathfrak{a}$成立。（即$k = \min_{x \in \mathfrak{a}} v(x)$）那么$\mathfrak{a}$一定包含所有赋值为$k$的元素（见上一段）。于是$A$的理想只有如下形式：$\mathfrak{m}_k = \{x | v(x) \geq k\}$。从而构成了一个唯一的链$\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}_2 \supset \cdots$.

于是A是Noetherian的。

由于$v: K^* \to \mathbb{Z}$是满射（离散赋值的定义），存在$x \in \mathfrak{m}, v(x) = 1$，那么$\mathfrak{m} = (x)$，$\mathfrak{m}_k = (x^k)$。因此$\mathfrak{m}$是唯一的非零素理想，于是是1维Noetherian局部环，并且每个理想都是极大理想的幂。这正是9.0最后提到的环的特征！事实上，有相当多的特征能够刻画DVR。

9.2 设**A是1维Noetherian局部整环，$\mathfrak{m}$是极大理想，剩余域$k = A/\mathfrak{m}$。那么以下等价：**

1. A**是DVR；2.** A**是整闭的；3.** $\mathfrak{m}$**是主理想；4.** $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$**；5.** **每个非零理想都是**$\mathfrak{m}$**的幂；6.** **存在一个**$x \in A$**，使得每个非零理想都有形式**$(x^k)$

证：

首先证明两个结果：

A. 对于非零，整个环的理想$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{a}$是$\mathfrak{m}-$准素的；并且对充分大n，$\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}^n$。

这是因为$r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m}$，然后利用4.2。第二个论断是7.16的结果。

B. $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1} \forall \mathfrak{n}$。这是Noetherian局部环分类定理（8.6）的结果。

$1 \implies 2$. 5.18：赋值环都是整闭的。

$2 \implies 3$. 设$a \in \mathfrak{m}, a \neq 0$。由A.存在$n$使得$\mathfrak{m}^n \subseteq (a)$，但$\mathfrak{m}^{n-1} \nsubseteq (a)$。那么选择$b \in \mathfrak{m}^{n-1} - (a)$。取$x = a/b \in K$。由于$b \notin (a)$，$x^{-1} \notin A$。于是$x^{-1}$不在$A$上整。

那么由5.1：$x^{-1}\mathfrak{m} \nsubseteq \mathfrak{m}$，因为如果$x^{-1}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$，$\mathfrak{m}$就是忠实$A[x^{-1}]-$模，并且$A$的理想作为$A$模由于Noetherian是有限生成的，于是$x^{-1}$在$A$上整，矛盾。

然而$x^{-1}\mathfrak{m} \subseteq A$，因为$b \in \mathfrak{m}^{n-1}, b\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^n \subseteq (a)$，于是$(b/a)\mathfrak{m} \subseteq A$。

故只有$x^{-1}\mathfrak{m} = A$，于是$\mathfrak{m} = Ax = (x)$.

$3 \implies 4$. 由2.8$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq 1$，由B. $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) > 0$

$4 \implies 5$. 设$\mathfrak{a} \neq (0), (1)$，由A. 可设$\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}^n$。那么$A/\mathfrak{m}^n$中$(0)$不再是素理想（因为它的拉回不是），于是$\dim A/\mathfrak{m}^n = 0$，从而是Artin局部环。那么由8.8的证明过程，一定有$\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{m}}^r$，从而拉回得到$\mathfrak{a}$是$\mathfrak{m}$的幂。

$5 \implies 6$. 由B. $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$，于是设$x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$。然而$(x) = \mathfrak{m}^r$，于是只能有$r = 1$。那么其全体理想$(\mathfrak{m}^k)$都写成$(x^k)$形式。

$6 \implies 1$.

$(x) = \mathfrak{m}$，因为它是(x^k)中最大的。那么由B. $(x^k) \neq (x^{k+1})$，于是对于任何元素$a \neq 0$，$(a) = (x^k)$中k被唯一决定。定义$v(a) = k$，并且延拓到K^*上：$v(a/b) = v(a) - v(b)$。很容易验证它的确是离散赋值，并且A是赋值环。

9.2 Dedekind整环

9.3 设A是1维Noetherian整环，那么以下等价：

1. A整闭；2. 每个准素理想都是素理想的幂；3. 每个局部环$A_\mathfrak{p}$都是离散赋值环。

证：

$1 \iff 3$. 由5.13和9.2.：整闭是局部性质。

$2 \iff 3$. 由于准素理想和理想的幂在局部化下保持（3.11,4.8）；那么由9.2即证。

定义（**Dedekind整环**）上述条件成立时则称为**Dedekind整环**。

9.4 Cor. Dedekind整环中任何非零理想存在唯一的素理想乘积的分解。

证：9.1,9.3.

例：任何PID都是Dedekind整环：因为它是1维Noetherian整环。并且每个局部环$A_\mathfrak{p}$都是PID于是由9.2是DVR；从而由9.3是Dedekind整环。

K是$\mathbb{Q}$的有限代数扩张，那么其代数整数环（$\mathbb{Z}$的整性闭包）A是Dedekind整环：

9.5 代数整数环A是Dedekind整环。

证：$\text{char } \mathbb{Q} = 0$，于是有限扩张一定是可分扩张。那么由5.17存在一组K在$\mathbb{Q}$上的基$v_1, \cdots, v_n$，且$A \subseteq \sum \mathbb{Z}v_i$.

因此A是有限生成$\mathbb{Z}-$模，于是是Noetherian的。同时作为整性闭包它一定自身是整闭的。

对于任何非零素理想$\mathfrak{p}$，由5.9，如果$\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = 0$，注意到$(0) \subset \mathfrak{p}$，且它们的拉回相同，于是$\mathfrak{p} = (0)$，矛盾。故$\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} \neq 0$

那么由5.8，$\mathfrak{p}$是极大的（因为它的拉回是$\mathbb{Z}$中的非零素理想，从而极大）

上述条件说明了A是整闭的1维Noetherian环，于是是Dedekind整环。

（现在我们看到了代数整数环的唯一分解定理9.4：而这事实上是历史上最先得到的结果；第四章的准素分解实际上是后来的推广）

9.3 分式理想

定义（分式理想）设A是整环，K是分式域，那么K的一个$A-$子模M被称为分式理想，如果存在$x \in A, x \neq 0$使得$xM \subseteq A$。

在这个定义下，普通理想对应着$x = 1$的情况，它们通常被称为整理想。

任何$u \in K$都能生成一个分式理想（取x为分母），记为(u)或Au，它们被称为主分式理想。

对于一个分式理想M，全体使得$xM \subseteq A$的$x \in K$构成的集合记为$(A : M)$。

每个有限生成模M都是分式理想：取x为生成元的分母的积。

Noetherian环A的每个分式理想都是有限生成模：因为分式理想一定形如$x^{-1}\mathfrak{a}$，而$\mathfrak{a}$有限生成$A-$模。

定义（可逆理想）记号同前，K的一个$A-$子模被称为可逆理想，如果存在另一个子模N，满足$MN = A$。

这个子模N是唯一的，并且恰好等于$(A : M)$：因为
$N \subseteq (A : M) = (A : M)MN \subseteq AN = N$

可逆理想M是有限生成的，于是是分式理想：因为$M(A : M) = A$，于是存在$x_i \in A, y_i \in (A : M)$，满足$\sum_{finite} x_i y_i = 1$。

那么对于任何$x \in M$，$x = \sum (y_i x) x_i$，并且$y_i x \in A$。故M是有限生成$A-$模。

非零主分式理想可逆：$(u) \leftrightarrow (u^{-1})$

可逆理想构成了群，群运算为乘法，单位元为$A = (1)$

可逆性是局部性质：

9.6 对于一个分式理想M，以下等价：

1. M是可逆理想；**2.** M有限生成，且对任何素理想$\mathfrak{p}$，$M_\mathfrak{p}$可逆。（注意讨论$M_\mathfrak{p}$是可逆理想时我们意指的是它是$A_\mathfrak{p}$的可逆理想）；**3.** M有限生成，且对任何极大理想$\mathfrak{m}$，$M_\mathfrak{m}$可逆。

证：$1 \implies 2$. 有限生成已证。由3.15：$A_\mathfrak{p}=(M(A:M))_\mathfrak{p}=M_\mathfrak{p}(A_\mathfrak{p}:M_\mathfrak{p})$

$2 \implies 3$.显然。

$3 \implies 1$. 设$\mathfrak{a}=M\cdot(A:M)$，对于每个极大理想都有$\mathfrak{a}_\mathfrak{m}=M_\mathfrak{m}\cdot(A_\mathfrak{m}:M_\mathfrak{m})=A_\mathfrak{m}$。那么$\mathfrak{a}\not\subseteq\mathfrak{m}$，由极大理想知只有$\mathfrak{a}=A$，从而证明了$M$是可逆理想。

我们在9.1,9.2节中已经看出了Dedekind整环与DVR之间构成整体-局部的对应关系，接下来的一组结果也能展示出这一点。

9.7 A是局部整环，A是**DVR** $\iff$ 每个非零分式理想都是可逆的。

证：

$\implies$. 设A的极大理想$\mathfrak{m}=(x)$。对于一个非零分式理想M，存在$y\in A$，$yM\subseteq A$，于是yM是一个整理想，即$yM=(x^r)$，那么$M=(x^{r-s}), s=v(y)$，从而一定可逆：$(x^{r-s})(x^{s-r})=A$

$\Longleftarrow$.

每个非零整理想都是可逆的，从而都是有限生成的，于是A是Noetherian的。

因此只需证明每个非零理想都是极大理想$\mathfrak{m}$的幂。假定这不成立，设Σ是全体不能写成极大理想的幂的非零理想构成的理想族。由Noetherian性极大元存在，那么$\mathfrak{a}\neq\mathfrak{m}$，于是$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{m}$。于是$\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}\subset\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m}=A$，且$\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{a}$.

如果$\mathfrak{a}=\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}$，就有$\mathfrak{a}=\mathfrak{m}\mathfrak{a}$，那么由Nakayama引理（2.6）有$\mathfrak{a}=0$，矛盾。

于是$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}\subset A$，从而由极大性$\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}$是$\mathfrak{m}$的幂，从而$\mathfrak{a}$也是，矛盾。

9.8 A是整环，则A是Dedekind整环 $\Longleftrightarrow$ 每个非零分式理想都是可逆的。

证： $\Longrightarrow$ 设$M \neq 0$是分式理想，由于A是Noetherian环，M是有限生成模（见前）。对于每个素理想$\mathfrak{p}$，$M_\mathfrak{p}$都是非零的$A_\mathfrak{p}$的分式理想。而$A_\mathfrak{p}$是DVR，从而说明了$M_\mathfrak{p}$均可逆，于是由9.6，M可逆。

$\Longleftarrow$. 每个非零整理想都是可逆的，于是是有限生成的，从而A是Noetherian的。

只需说明每个$A_\mathfrak{p}$都是DVR，从而只需说明$A_\mathfrak{p}$的非零分式理想都是可逆的。更进一步，这只需说明每个整理想都是可逆的。因为分式理想一定具有形式$x^{-1}\mathfrak{a}$。

对于$A_\mathfrak{p}$的任何一个整理想$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b} \cap A$。由于$\mathfrak{a}$是可逆的（9.7），于是$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$也是可逆的：理想逆在局部化下保持。

9.9 如果A是Dedekind整环，那么非零分式理想构成了一个群。（因为这个群就是可逆理想构成的群）

这个群称为Dedekind整环的理想群：记为I。9.4指出I是由非零素理想生成的自由Abel群：因为$x^{-1}\mathfrak{a}$和$x\mathfrak{a}$互逆，然后再将9.4应用到所有整理想上即可。

记K^*是分式域K的乘法子群，每个$u \in K^*$都定义了一个分式理想(u)，从而
$\phi : K^* \to I : u \mapsto (u)$是群同态：像是全体主分式理想$P$。

那么$H = I/P$称为理想类群。

另一方面ϕ的核正是全体$u \in K^*$使得$(u) = (1)$，即A的单位群U，因此有正合列：

$$1 \to U \to K^* \to I \to H \to 1$$

Remark.

代数数论给出了如下结果：

9.10.1 H是有限群，其阶h称为K的类数。并且以下等价：$1.h=1; 2.I=P; 3.A$是**PID** ; $4.A$是**UFD**。

9.10.2 U是有限生成**Abel**群：U的挠子群W是K中的单位根，因此是循环群；商去这个挠子群后得到的自由部分U/W满足以下结果：

如果$(K:\mathbb{Q})=n$，存在n种$K\to\mathbb{C}$的嵌入。其中有r_1个实嵌入；r_2个复嵌入：当然$r_1+2r_2=n$，则U/W生成元个数是r_1+r_2-1.

9.4(E)

1. A是**Dedekind**整环，S是乘性子集，证明$S^{-1}A$要么仍然是**Dedekind**整环，要么是分式域。

对于$S\neq A-\{0\}$，H,H'分别为A，$S^{-1}A$的理想类群，证明理想的扩张诱导了理想类群之间的满同态。

证：

A是整闭1维Noetherian整环。5.12说明局部化保持整闭性，那么$S^{-1}A$仍然是整环，因为它自然的嵌入在分式域K内。同时局部化不可能增加维数：因此对维数0和1讨论则自然说明了它要么是Dedekind整环，要么是分式域K。

对于第二个论断，注意主分式理想仍然被应为主分式理想：$xA\mapsto xS^{-1}A$，那么结果显然。满性由分式化后的理想都是扩张理想得到。

2. （**Gauss**引理）对于**Dedekind**整环A，$f\in A[x]$，记容度为多项式全体系数生成的理想。那么$c(fg)=c(f)c(g)$

证：

假定这个结论对于DVR成立。

由3.11，$c(f)_\mathfrak{p}$正是f在$A_\mathfrak{p}$中的像的容度。那么$c(fg)_\mathfrak{p}=c(f)_\mathfrak{p}c(g)_\mathfrak{p}=[c(f)c(g)]_\mathfrak{p}$

另一方面$c(fg)\subseteq c(f)c(g)$，因此考虑$[c(f)c(g)]/c(fg)$，并运用3.8就得到了$c(fg)=c(f)c(g)$

下面只需假设A是DVR。由1.E2.4，这个结果是显然的，因为$f/c(f)$是本原的：这里的除法指对$c(f)$的生成元做除法。（$c(f)$是主理想）

3. 一个赋值环是Noetherian的 $\Longleftrightarrow$ 它是DVR。

证：$\Longleftarrow$.显然

$\Longrightarrow$. 由5.18，赋值环是局部且整闭的。只需证明它是1维的。

任何A中理想$\mathfrak{a}$都是有限生成的，设为$(x_1,\cdots,x_n)$。由5.E28，(x_j)是全序排列的，于是$\mathfrak{a}$是主理想。

而主理想整环一定是不超1维的：若$(a)\subset(b)$，且$(a),(b)$均为素理想，那么设$a=xb$，于是$x\in(a)$，设$x=ya$，即$a=yab$，即$yb=1$。那么$(b)=(1)$，矛盾。

而0维主理想整环是域，显然不是赋值环，于是这个环维度是1，从而得证。

4. 设A是局部整环（非域），极大理想$\mathfrak{m}$是主理想并且$\cap\mathfrak{m}^n=0$，证明A是DVR。

证：

对于任何非$(0),(1)$理想$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{m}$，并且由于$\cap\mathfrak{m}^n=0$，$\bigcap(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}^n)=0$，从而一定存在一个$\mathfrak{m}^n$使得$\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{m}^n$。

于是$r(\mathfrak{a})=\mathfrak{m}$。因此唯一的非零素理想是$\mathfrak{m}$，即维数为1.

对于任何非单位元素x，存在一个最小的正整数n使得$x\supseteq\mathfrak{m}^n$，定义$v(x)=n$，$v(x/y)=v(x)-v(y)$，单位的赋值定义为0.

可以验证这的确是一个离散赋值。

5. 设M**是Dedekind整环上的有限生成模，证明**M平坦 $\iff$ M无挠。

由3.E13：M无挠 $\iff$ $\forall \mathfrak{p}, M_{\mathfrak{p}}$无挠

由7.E16：M平坦 $\iff$ $\forall \mathfrak{p}, M_{\mathfrak{p}}$自由

因此只需说明对于DVR上有限生成模M，M无挠 $\iff$ M自由。

然而DVR是PID，因此由PID上有限生成模结构定理得证。

6.（Dedekind整环上有限生成模结构定理） 设M**是Dedekind整环上的有限生成挠模**（$T(M) = M$）

证明：M一定是若干$A/\mathfrak{p}_i^{n_i}$的直和。（$\mathfrak{p}_i \neq 0$）

证：

对于任何素理想$\mathfrak{p}$，$A_{\mathfrak{p}}$是DVR，那么$M_{\mathfrak{p}}$是有限生成的挠$A_{\mathfrak{p}}$模。又DVR是PID。于是$M_{\mathfrak{p}} \cong \bigoplus A_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^{n_j}$。

另一方面$A_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}^{n_j}A_{\mathfrak{p}}) \cong (A/\mathfrak{p}^{n_j})_{\mathfrak{p}} \cong A/\mathfrak{p}^{n_j}$（最后一个同构是环同构：可自行验证）

对于每个$\mathfrak{p} \in Supp(M)$，自然有$M \to M_{\mathfrak{p}}$，于是有$\phi : M \to \bigoplus M_{\mathfrak{p}}$.

对于任何素理想$\mathfrak{q}$: $\phi_q : M_q \to (\bigoplus M_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{q}} \cong (M_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{q}} \cong M_{\mathfrak{q}}$是同构。（$\mathfrak{q} \notin Supp(M)$时当然$0 \to 0$是同构）于是由3.9$\phi$也是同构，从而得证。

7. 设A**是Dedekind整环，**$\mathfrak{a} \neq 0$。证明$A/\mathfrak{a}$中的每个理想都是主理想。

作为推论：**Dedekind整环中每个理想至多被2个元素生成。**

证：

首先对于$A/\mathfrak{p}^n$，它同构于$A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}}$。而$A_{\mathfrak{p}}$是DVR，于是是PID，从而$A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}}$也是PID。

对于任何理想$\mathfrak{a}$，它有分解$\mathfrak{a}=\prod \mathfrak{p}_i^{n_i}$。由于这些理想的两两互素，于是由1.10：

$A/\mathfrak{a}\cong \prod A/\mathfrak{p}_i^{n_i}$

但是主理想环的直积一定是主理想的，得证。

8. 设$\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$**是Dedekind整环的理想，证明：**

$\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}$

$\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cap(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})$

证：由于上述等式已经有一个自然的包含关系，那么在这种情况下相等是局部性质（3.8），因此只需对任何DVR证明即可。

然而DVR情况是显然的，因为每个理想都有形式$(x^a),(x^a)+(x^b)=(x^{\min(a,b)}),(x^a)\cap(x^b)=(x^{\max(a,b)})$。

9.（中国剩余定理）设$\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$**是理想，**$x_1,\cdots,x_n$**是Dedekind整环**$A$中的元素。

那么同余方程组$x\equiv x_i \mod \mathfrak{a}_i$有解$\iff x_i\equiv x_j \mod \mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_j$。

证：

这等价于说明复形$A\xrightarrow{\phi}\bigoplus A/\mathfrak{a}_i\xrightarrow{\psi}\bigoplus_{i<j}A/(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_j)$是正合的。

其中$\phi(x)=(x+\mathfrak{a}_1,\cdots,x+\mathfrak{a}_n)$，$\psi(x_1+\mathfrak{a}_1,\cdots,x_n+\mathfrak{a}_n)$的第$(i,j)-$分量为$x_i-x_j+\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_j$。

由于复形的正合是局部性质（3.8），只需考虑局部化下的情况，即无妨A是DVR。

此时情况是简单的，设$\mathfrak{a}_i=(x^{m_i})$且$m_1\le m_2\le\cdots\le m_n$。

那么$(x_1+\mathfrak{a}_1,\cdots)\in\ker\psi \iff v(x_i-x_j)\ge n_i \implies (x_1+\mathfrak{a}_1,\cdots)=\phi(x_n)$

得证。

10. 完备化

10.0 引言

在古典代数几何中我们经常会考虑的是形式幂级数环，它是多项式环的完备化。另一个例子是数论中的$p-adic$数，同样它也表现出了形式幂级数的性质：$\sum a_n p^n$

在这一章中我们将拓展以上例子，考虑任何理想$\mathfrak{a}$的adic完备化。实行这种完备化的方式是赋予拓扑，并且将高幂次项认为是较小的项。

完备化与局部化有一定相似之处，就是它们都将注意力转到了某个理想附近。然而完备化相比局部化来说更为简单。例如一个n维簇在某一点的局部环的完备化一般都是n元幂级数环；但是两个点的局部环一般都不是同构的，除非它们之间是双有理等价的：即局部环的分式域同构。因此局部化的区分力度是要大于完备化的。

和局部化一样，（有限生成模的）完备化也保持了正合与Noetherian这两个重要性质。另一个重要的结果是Krull定理：它实际上模拟了解析函数的泰勒展开（对于Noetherian局部环这个定理退化成为$\cap\mathfrak{m}^n=0$，但是回忆Zariski切空间就可以理解它和泰勒展开的相似处）。

为了更好的研究完备化，分次环也在这章中被引入了。如同非分次的环构成了仿射情况的基石；分次环实际上是射影情况的基石。事实上接下来介绍的分次环构造$G_{\mathfrak{a}}(A)$有着很明确的几何意义：如果A是点P关于射影簇V的局部环，$\mathfrak{a}$是极大理想，那么$G_{\mathfrak{a}}(A)$正是点P的切锥。这有助于帮助理解$G_{\mathfrak{a}}(A)$与V在P附近的性质的联系。

10.1 拓扑群和完备化

设G是拓扑Abel群：即$G\times G\to G:(x,y)\mapsto x+y$；$G\to G:x\mapsto -x$这两个映射都是连续的。

如果$\{0\}$是闭的，那么$G \times G$的对角线是闭的（$\{0\}$在连续映射$(x, y) \mapsto x - y$下的原像）从而G是Hausdorff的。

对于一个固定的元素$a \in G$：平移$T_a : x \mapsto x + a$是一个同胚：因为T_a, T_{-a}都是连续的。于是对于任何0的邻域U，$U + a$是a的邻域，反之亦然。因此G的拓扑被0的邻域唯一决定了。

10.1 设H是0的所有邻域的交。那么：

1. H**是一个子群。2.** H**是**$\{0\}$**的闭包；3.** G/H**是Hausdorff的；4.** G**是Hausdorff的** $\iff H = \{0\}$

证：

10.1.1. 由于$x \mapsto -x$是同胚，因此很容易说明$U^{-1} \subseteq \cap U$，从而$H^{-1} \subseteq H$。

另一方面由于$+ : G \times G \to G$是连续映射，对于任何0的邻域U，其原像一定是$< 0, 0 >$的邻域W，那么一定存在0的邻域使得$V_1 \times V_2 \subseteq W$

10.1.2 $x \in H \iff 0 \in x - U, \forall U \ni 0 \iff x \in \overline{\{0\}}$

最后一个等价是因为这相当于任何x的邻域都包含0.

10.1.3/10.1.4

考虑商拓扑，由于H是闭的，那么H的任何陪集都是闭的，于是自然G/H中的每个点都是闭的，于是Hausdorff。由此10.1.4显然。

10.1a 一般的完备化

接下来我们讨论拓扑群的完备化。

首先我们假定0点处具有可数邻域基，从而处处如此（即第一可数）

这样假定的一个原因也许是：**(Birkhoff-Kakutani)** G**是拓扑群，则它可度量化** $\iff$ **它是Hausdorff且第一可数的。**

因此接下来的完备化其实是隐含着一个“隐藏”的度量，这也和完备化这一名称相符。

首先回忆一下两个定义：

称G中的序列是Cauchy列如果对于任何0的邻域U，$\exists s(U)\in\mathbb{N}$使得
$\forall \mu,\nu > s(U), x_\mu - x_\nu \in U$

称G中的序列收敛到某个元素g如果对于g的任何邻域U，$\exists s(U)\in\mathbb{N}$使得
$\forall \mu > s(U), x_\mu \in U.$

（Cauchy列的等价类）称两个Cauchy列等价，如果$x_\nu - y_\nu \to 0$。这个关系的确是一个等价关系。

证：

自反性是简单的，对称性因为如果$x_\nu \sim y_\nu$，那么$y_\nu \sim x_\nu$。因为$x \mapsto 0 \implies -x \mapsto 0$（考虑邻域$V = U \cap (-U)$即可）

对于传递性，只需说明$x_n \to 0, y_n \to 0 \implies x_n + y_n \to 0$

考虑$+^{-1}(U) \subseteq G\times G$，由于$+$的连续性，这是一个开集。于是存在$U_1, U_2$两个开集使得$+(U_1, U_2) \subseteq U$，即$U_1 + U_2 \subseteq U$，那么取指标的较大者即可完成证明。

（Cauchy列的加法）两个Cauchy列x_ν, y_ν的和$x_\nu + y_\nu$仍然是Cauchy列。

证：这和上一个证明几乎一样：依然选取$U_1 + U_2 \subseteq U$，下同。

将全体等价类构成的集合称为$\hat{G}$。为$\hat{G}$赋予群结构：定义$(x_\nu) + (y_\nu) = (x_\nu + y_\nu)$，很容易验证这和等价类的代表元无关。

另一方面$\hat{G}$还有拓扑结构：对于每个G的开集，定义
$\hat{U} = \{\hat{x} \in \hat{G} | 等价类中的每一个Cauchy列x_n, \exists N, \forall j > N, x_j \in U\}$，它构成$\hat{G}$的一个拓扑基（自行验证）。于是$\hat{G}$是拓扑群。

存在群同态$\phi:G\to\hat{G}:x\mapsto(x,x,x,\cdots)$. 于是很容易验证$\ker\phi=\cap_{0\in U}U=\{\bar{0}\}$，于是由10.1，$\phi$是单的$\iff G$是Hausdorff的。

另外ϕ是连续的：这只需对$\hat{G}$拓扑基的原像验证即可。

接下来我们考虑群同态诱导出的完备群同态。

设G,H是两个交换拓扑群，$f:G\to H$是连续同态，则G中Cauchy列在f下的像仍然是Cauchy的。这是因为$f^{-1}(U)$总是0的邻域，于是结果显然。

另一方面我们仍可以类似地说明$(x_\nu)\sim(y_\nu)\implies(f(x_\nu))\sim(f(y_\nu))$

于是这样的连续同态诱导出了$\hat{f}:\hat{G}\to\hat{H}$

断言：$\hat{f}$是连续的。

我们只需证明$\hat{f}^{-1}(\hat{U})=\widehat{f^{-1}(U)}$（后者当然是开集）

首先说明$\hat{f}^{-1}(\hat{U})\subseteq\widehat{f^{-1}(U)}$

如果$[(x_\nu)]\in\hat{f}^{-1}(\hat{U})$，那么$\exists N\in\mathbb{N},\forall j>N,f(x_j)\in U$，i.e.,$x_j\in f^{-1}(U)$，于是$[(x_\nu)]\in\widehat{f^{-1}(U)}$

再来说明$\hat{f}^{-1}(\hat{U})\supseteq\widehat{f^{-1}(U)}$，这和上述说明是几乎相同的。

另外通过直接验证我们有$\widehat{g\circ f}=\hat{g}\circ\hat{f}$

10.1b 逆向极限构造的完备化

10.1a中我们讨论了很一般的拓扑群的完备化，它们中一个著名的例子就是$\mathbb{Q}$到$\mathbb{R}$的完备化，但是接下来考虑一个交换代数中经常出现的拓扑。

假定：$0 \in G$存在一组由一个子群降链构成的邻域基，**i.e.** $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots$

（一个例子是$p-$进拓扑：$G_n = p^n\mathbb{Z}$）

这样的G_n都是既开又闭的：因为G_n自身在邻域基中于是是开的，于是其陪集都是开集，从而G_n的补是一些陪集的并，于是也是开的。

对于携带有如上所述定义拓扑的拓扑群G，它的完备化存在一个相当简单的构造。

对于任何Cauchy列x_ν，x_ν在G/G_n中的像最终一定是一个常数（$\forall G_n, \exists s_n, x_\nu - x_\mu \in G_n, \forall \mu, \nu \geq s_n, i.e. \{\bar{x_n}\}$最终恒定），设这个常数是$\xi_n$

我们自然有投影映射$G/G_{n+1} \xrightarrow{\theta n+1} G/G_n$，并且当然$\xi_{n+1} \to \xi_n$。（直观地说，在更细的子群下稳定当然能够保证序列在更粗的子群下稳定，且稳定点相同）

因此每个Cauchy列定义了一个凝聚列(ξ_n)，它满足$\theta_{n+1}(\xi_{n+1}) = \xi_n$

因此$\hat{G}$显然就是全体凝聚列构成的集合（其上附有显然的群结构）

这实际上正是逆向极限的特例：$\hat{G} \cong \varprojlim G/G_n$。

Remark. 接下来的逆向极限仅考虑$\cdots \to \cdot \to \cdot \to \cdot$形式的极限。

10.2（逆向极限左正合）对于**Abel**群范畴中逆向系统的正合列$0 \to \mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{C} \to 0$，$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n$一定正合；

如果$\mathbf{A}$是满射系统：即$A_{n+1} \xrightarrow{\theta_{n+1}} \cdots$中$\theta_{n+1}$均为满射时，$0 \to \mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{C} \to 0$，$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n \to 0$正合。

证：

这有一个极其简单的证明（因为我们的逆向系统选取的很简单）：取$A=\prod A_n$，d^A将第n个分量映为$a_n-\theta_{n+1}(a_{n+1})$，于是$\varprojlim A_n\cong\ker d^A$。

考虑正合列之间的映射构成的交换图，由蛇形引理立刻有：

$0\to\ker d^A\to\ker d^B\to\ker d^C\to\text{coker }d^A\to\text{coker }d^B\to\text{coker }d^C\to 0$

于是只需说明$\mathbf{A}$是满射系统保证了d^A是满射。但是这是显然的：可以非常显然地归纳构造出原像。

于是结论得证。

（Remark：coker $d^A=\varprojlim^1 A_n$正是导出极限）

作为推论，我们可以方便的利用逆向极限研究完备群的正合性。

10.3（群完备化的正合性） 设$0\to G'\to G\xrightarrow{p}G''\to 0$是交换群的正合列。设$G$上的拓扑由一列子群$\{G_n\}$决定，并且诱导出$G',G''$的拓扑：$\{G'\cap G_n\},\{p(G_n)\}$

那么$0\to\hat{G}'\to\hat{G}\to\hat{G}''\to 0$是正合的。

证：

对$0\to G'/(G'\cap G_n)\to G/G_n\to G''/p(G_n)\to 0$应用10.2：（$\{G'/(G'\cap G_n)\}$自然是满射系统）

特别地，在10.3中取$G'=G_n$，那么$G''=G/G_n$上的拓扑是离散拓扑（邻域系中存在$\{0\}$）自然$\hat{G}''=G''$，因此运用10.3得到：

10.4 $\hat{G}_n$是$\hat{G}$的子群：$\hat{G}/\hat{G}_n\cong G/G_n$：它们都同构于$G''\cong\hat{G}''$

在10.5中取逆向极限立刻得到：

10.5（完备化是完备的） $\hat{\hat{G}} \cong \hat{G}$：这可比拓扑上论证完备化是完备的要简洁多了。

定义（完备）如果$\phi : G \to \hat{G}$是同构那么称G是完备的。

回忆$\ker\phi = \cap_{U\ni 0} U = \overline{\{0\}}$，于是完备性蕴含着Hausdorff性。

10.1c a-adic拓扑

10.1b中我们研究一列子群作为邻域系决定的拓扑是因为如下拓扑具有极其重要的地位：$G = A, G = \mathfrak{a}^n$，其中$\mathfrak{a}$是环$A$的理想。这样的拓扑称为$\mathfrak{a} - adic$拓扑。

很容易验证环运算在这样的拓扑下是连续的，于是A成为拓扑环：对每个邻域$xy + \mathfrak{a}^n$都有$(x + \mathfrak{a}^n)(y + \mathfrak{a}^n) \subseteq xy + \mathfrak{a}^n$。

由10.1，这个拓扑是Hausdorff的$\iff \cap \mathfrak{a}^n = (0)$。当然完备化$\hat{A}$同样能够构成一个拓扑环：$\phi : A \to \hat{A}$也是连续环同态，且$\ker\phi = \cap\mathfrak{a}^n$

这样的拓扑也可以运用到模上：$G = M, G_n = \mathfrak{a}^n M$。完备化$\hat{M}$也构成了一个拓扑$\hat{A}-$模。对于任何$A-$模同态$f : M \to N$，$f(\mathfrak{a}^n M) \subseteq \mathfrak{a}^n N$，于是$f$是连续的，从而定义出了$\hat{f} : \hat{M} \to \hat{N}$

例：对于域上多项式环$k[x]$，$\mathfrak{a} = (x)$，那么完备化环$\hat{A} = k[[x]]$.

对于$A = \mathbb{Z}, \mathfrak{a} = (p)$，完备化环$\hat{A} = \mathbb{Z}_p$

10.1d 滤链

我们用另一种方式定义模的$\mathfrak{a}-adic$拓扑：考虑一族子模的降链$M=M_0\supseteq M_1\supseteq\cdots$。

称它是$\mathfrak{a}-$滤过，如果$\mathfrak{a}M_n\subseteq M_{n+1}$，称它是稳定$\mathfrak{a}-$滤过，如果对于充分大的$n$都有$M_{n+1}=\mathfrak{a}M_n$。自然地$(\mathfrak{a}^nM)$是稳定$\mathfrak{a}-$滤过。

10.6 对于两个稳定$\mathfrak{a}-$滤过$(M_n),(M_n')$，它们之间的差有限：存在n_0使得$M_{n+n_0}\subseteq M_n';M_{n+n_0}'\subseteq M_n$对一切$n$成立。因此所有稳定$\mathfrak{a}-$滤链事实上定义出了同一个拓扑，即$\mathfrak{a}-$拓扑

证：

无妨令一个滤过$M_n'=\mathfrak{a}^nM$. 假定$\forall n>n_0$，$\mathfrak{a}M_n=M_{n+1}$，并且对于任何n，$\mathfrak{a}^nM\subseteq M_n$. 自行验证即可。

10.2 分次环和分次模

定义（分次环）一个分次环是一个环A和一族加法子群$A_n(n\geq 0)$，满足$A=\oplus A_n,A_mA_n\subseteq A_{m+n}$。那么$A_0$是子环并且$A_n$都是$A_0$模。

定义（分次模）给定分次环A，一个分次模M是$A-$模M和一族加法子群$M_n(n\geq 0)$，满足$M=\oplus M_n,A_mM_n\subseteq M_{m+n}$。同样，每个$M_n$都是$A_0$模。

任何元素$y\in M$都可以被唯一的写成有限和$\sum_n y_n,y_n\in M_n$，它们称为y的齐次部分。

分次$A-$模的同态定义为$A-$模同态$f:M\to N$，满足$f(M_n)\subseteq N_n$

对于分次环A，令$A_+=\oplus_{n>0}A_n$，那么它是一个理想。

10.7（分次环的**Noetherian**性）对于分次环A，以下等价：

1. A是**Noetherian**的；**2.** A_0是**Noetherian**的且A是有限生成A_0**-**代数。

证：

$1 \implies 2$. $A_0 \cong A/A_+$，于是是Noetherian的。A_+是一个理想，于是有限生成，设为$x_1, \cdots, x_s$，我们可将其分解成齐次部分，于是可假设这些有限元素都是齐次的。设次数为$k_1, \cdots, k_s$。

记A'为$x_1, \cdots, x_s$生成的子环。我们证明$\forall n > 0, A_n \subseteq A'$。

对n归纳，$n = 0$时显然。$n > 0$时令$y \in A_n$，自然$y \in A_+$，于是可令$y = \sum a_i x_i$。

于是当然$a_i \in A_{n-k_i}$（负指标时取0）。那么对这些分量应用归纳假设，就得到了y是$x_1, \cdots, x_n$的$A-$系数多项式，从而$A_n \subseteq A'$，故$A' = A$

$2 \implies 1$. Hilbert基定理（7.6）

10.2a Artin-Rees引理

对于一个普通的环A，理想$\mathfrak{a}$。我们可以构造出一个分次环$A^* = \oplus \mathfrak{a}^n$。乘法按照分次环需要的方式定义。

同样对于一个$\mathfrak{a}-$滤过M_n，$M^* = \oplus M_n$是一个分次A^*-模。

如果A是Noetherian的，$\mathfrak{a}$有限生成，设生成元为$x_1, \cdots, x_r$，那么$A^* = A[x_1, \cdots, x_r]$也是Noetherian的。

10.8 设A**是Noetherian的，**M是有限生成$A-$模，(M_n)是$\mathfrak{a}-$滤链，则以下等价：

1. M^*是有限生成A^*模；**2.** 滤链是$\mathfrak{a}-$稳定的。

证：

M是Noetherian模，于是M_n有限生成。那么$Q_n = \oplus_0^n M_n$也是有限生成的。

它是M^*的子群（但一般不是子模），但是它生成了一个子模：
$M_n^* = M_0 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus \mathfrak{a}M_n \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}^r M_n \cdots$

由于Q_n是有限生成A模，自然可以验证M_n^*是有限生成A^*模。

这样的M_n^*构成了一个升链，并且其并为M^*。

由于A^*是Noetherian的，M^*有限生成 $\iff$ 链终止 $\iff$
$M^* = M_{n_0}^* \iff M_{n_0+r} = \mathfrak{a}^r M_{n_0} \iff$ 稳定滤链。

10.9（Artin-Rees引理）设A是Noetherian环，$\mathfrak{a}$是理想，M是有限生成$A-$模，M_n是稳定$\mathfrak{a}$滤链。对于子模（自然是有限生成的）M'，$M' \cap M_n$是M'的稳定$\mathfrak{a}$滤链。

证：

首先滤链是简单的：$\mathfrak{a}(M' \cap M_n) \subseteq \mathfrak{a}M' \cap \mathfrak{a}M_n \subseteq M' \cap M_{n+1}$

于是它定义出一个分次A^*模，并且是M^*的子模。由A^*是Noetherian的，这个子模是有限生成的，于是由10.8即得滤链稳定。

特殊地，取$M_n = \mathfrak{a}^n M$即得到一个特殊的Artin-Rees引理：

10.10 条件同前，存在一个k使得$(\mathfrak{a}^n M) \cap M' = \mathfrak{a}^{n-k}((\mathfrak{a}^k M) \cap M'), \forall n \geq k$

将10.9和10.6结合，就有了子模的拓扑相容性：

10.11 设A是Noetherian环，$\mathfrak{a}$是理想，M是有限生成$A-$模，M'是M的子模。那么两个滤链$\mathfrak{a}^n M'$和$(\mathfrak{a}^n M) \cap M'$差有界，并且诱导出了$M'$上相同的拓扑。

（在这章中10.11的结果已然足够强，但是下一章中将需要更强的结果）

10.2b 模完备化的性质

10.12（模完备化的正合性） 设$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$是**Noetherian**环$A$上有限生成模的正合列，$\mathfrak{a}$是一个理想，那么$\mathfrak{a}-adic$完备化后$0 \to \hat{M}' \to \hat{M} \to \hat{M}'' \to 0$仍然是正合的。

证：由10.11与10.3结合即证。

对于环，我们有同态$A \to \hat{A}$。因此$\hat{A}$是A代数。从而对于任何模，我们有纯量扩张$\hat{A} \otimes_A M$。自然的问题是它和$\hat{M}$关系如何。

注意到$M \to \hat{M}$的态射诱导出了：

$\hat{A} \otimes_A M \to \hat{A} \otimes_A \hat{M} \to \hat{A} \otimes_{\hat{A}} \hat{M} = \hat{M}$，一般情况下这个同态既不是单的也不是满的，但是在有限生成情况下有结果：

10.13 对于任何环A，有限生成$A-$模M。如上定义的同态$\hat{A} \otimes_A M \to \hat{M}$是满同态。更进一步，如果$A$还是**Noetherian**的，那么这个同态是同构。

证：

由10.3，完备化和有限直和当然是交换的。因此$F \cong A^n$时当然有$\hat{A} \otimes_A F \cong \hat{F}$（因为：$\hat{A} \otimes_A F \cong \hat{A} \otimes_A A^n \cong (\hat{A} \otimes_A A)^n \cong (\hat{A})^n \cong \widehat{(A^n)} \cong \hat{F}$）

那么假定M是有限生成的，我们有正合列$0 \to N \to F \to M \to 0$。

于是由张量积的右正合性：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \hat{A} \otimes_A N & \xrightarrow{d'} & \hat{A} \otimes_A F & \xrightarrow{d} & \hat{A} \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \gamma\downarrow & & \beta\downarrow & & \alpha\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \hat{N} & \xrightarrow{\delta'} & \hat{F} & \xrightarrow{\delta} & \hat{M} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

那么δ是满同态，β是同构。追图可知α是满同态。

如果A还是Noetherian的，那么F作为Noetherian环上的有限生成模是Noetherian的，于是N也是有限生成的。从而由第一部分结论知：γ是满同态。

若$x \in \hat{A} \otimes_A M$，$\alpha(x) = 0$。存在$y \in \hat{A} \otimes_A F$，$d(y) = x$。

由于$\delta(\beta(y)) = 0$，于是存在$z \in \hat{N}$，$\delta'(z) = \beta(y)$。

由于γ是满同态，存在$w \in \hat{A} \otimes_A N$，$\gamma(w) = z$。于是$\beta(d'(w)) = \beta(y)$，故$y = d'(w) \in Im(d')$，于是$x = d(y) = 0$

（Easy Diagram Chasing）

因此α还是单同态，从而是同构。

因此在Noetherian环A上的有限生成模范畴内：$\hat{A} \otimes_A -$是正合函子。因此：

10.14 A**是Noetherian环，**$\mathfrak{a}$**是理想，**$\hat{A}$是$\mathfrak{a} - adic$完备化。$\hat{A}$是平坦$A-$代数。

证：2.19.4

10.2c 环完备化的性质

10.15 对于**Noetherian**环A，$\hat{A}$是$\mathfrak{a} - adic$完备化，那么：

1. $\hat{\mathfrak{a}} = \hat{A}\mathfrak{a} \cong \hat{A} \otimes_A \mathfrak{a}$

2. $\widehat{\mathfrak{a}^n} = (\hat{\mathfrak{a}})^n$

3. $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \cong \hat{\mathfrak{a}}^n/\hat{\mathfrak{a}}^{n+1}$

4. $\hat{\mathfrak{a}} \subseteq J(\hat{A})$

证：

10.15.1 由于A是Noetherian环，$\mathfrak{a}$是有限生成的。那么$\hat{A}\otimes_A\mathfrak{a}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{a}$，并且像集正是$\hat{A}\mathfrak{a}$

10.15.2 将1应用在$\mathfrak{a}^n$上：$\widehat{\mathfrak{a}^n}=\hat{A}\mathfrak{a}^n\overset{1.18}{=}(\hat{A}\mathfrak{a})^n=(\hat{\mathfrak{a}})^n$

10.15.3 由10.4：$A/\mathfrak{a}^n\cong\hat{A}/\hat{\mathfrak{a}}^n$，于是结论显然。

10.15.4 由2和10.5知$\hat{A}$在$\hat{\mathfrak{a}}-adic$拓扑下是完备的，那么对于任何$x\in\hat{\mathfrak{a}}$，$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots$是一个Cauchy列，于是是完备的，从而$1-x$是单位。由1.9得证。

10.16 设A**是Noetherian局部环，**$\mathfrak{m}$**是极大理想。那么**$\mathfrak{m}-adic$**完备化**$\hat{A}$**是一个有着极大理想**$\hat{\mathfrak{m}}$**的局部环。**

证：

首先由10.15.3，$\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}\cong A/\mathfrak{m}$。于是$\hat{\mathfrak{m}}$是极大的，然而考虑10.15.4，$J(A)$只能是$\hat{\mathfrak{m}}$，从而说明了局部环。

10.2d Krull定理

一个自然的问题是模完备化时丧失了多少原有模的信息。

10.17（Krull定理）设A**是Noetherian环，**M**是有限生成**$A-$**模，**$\hat{M}$**是**$\mathfrak{a}$**完备化。那么**$M\to\hat{M}$**的核：**$E=\cap\mathfrak{a}^nM$**由全体能够被**$1+\mathfrak{a}$**的某些元素零化的元素组成。**

证：

E作为全体0的邻域的交，于是它的子空间拓扑是平凡的。另一方面10.11说明了拓扑的相容性：因此$\mathfrak{a}E=E$。

由Noetherian性容易推出E有限生成，那么由2.5，存在$x,1-x\in\mathfrak{a},(1-x)E=0$

反方向是显然的：如果$(1-x)y=0, x\in\mathfrak{a}$。那么$y=xy=x^2y=\cdots\in\cap\mathfrak{a}^nM=E$

Remark. 考虑$S=1+\mathfrak{a}$，于是$A\to\hat{A}$和$A\to S^{-1}A$有相同的核。另一方面验证$A\to\hat{A}$满足将S中元素全部映为单位，于是由泛性质存在$S^{-1}A\to\hat{A}$的同态。

10.17保证了这个同态是单的，于是$S^{-1}A$可以看做$\hat{A}$的子环。（在这里我们看到了完备化和局部化的关系）

Remark. A非Noetherian时命题可能不成立：A取为全体$\mathbb{R}$上的C^∞函数。$\mathfrak{a}$为全体在零点处消失的函数，自然$A/\mathfrak{a}\cong\mathbb{R}$。

$\cap\mathfrak{a}^n$是全体在零点处任意阶微分都是0的函数。

而被$1+x, x\in\mathfrak{a}$零化的函数一定在0点的邻域内消失，但是考虑e^{-1/x^2}即导出了矛盾。这也反过来说明了A不是Noetherian的。

Krull定理推论：

Cor. 10.18 设A是**Noetherian**整环，$\mathfrak{a}\neq(1)$是A的理想，那么$\cap\mathfrak{a}^n=0$

证：由于$1+\mathfrak{a}$不含任何零因子，于是由Krull定理得证。

Cor. 10.19 设A是**Noetherian**环，$\mathfrak{a}\subseteq J(A)$，$M$是有限生成$A-$模。那么$\mathfrak{a}-$拓扑是**Hausdorff**的，即$\cap\mathfrak{a}^nM=0$

证：由1.9$1+\mathfrak{a}$全部都是单位，于是不含任何零因子。

Cor. 10.20 设A是**Noetherian**局部环，$\mathfrak{m}$是极大理想，M是有限生成$A-$模。那么M的$\mathfrak{m}-$拓扑是**Hausdorff**的。特别地，A的$\mathfrak{m}-$拓扑是**Hausdorff**的。

证：10.19

回忆4.2,7.14，任何$\mathfrak{m}^n$和$\mathfrak{m}$之间的理想都是$\mathfrak{m}-$准素的。因此10.20说明全体$\mathfrak{m}-$准素理想的交是0. 如果A是一个一般的Noetherian环，那么考虑$A_\mathfrak{p}$，就能够得到：

10.21 A是**Noetherian**环，全体$\mathfrak{p}-$准素理想的交是$A \to A_\mathfrak{p}$的核。

证：准素理想在局部化下保持。

10.3 关联分次环

不同于之前的A^*，我们希望仿照多项式环进行构造，于是这就诱导出以下定义：

对于环A和理想$\mathfrak{a}$，定义$G_\mathfrak{a}(A) = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$，它是分次环。

注意：这里是群直和，乘法的定义为$\overline{x_n} \cdot \overline{x_m} = \overline{x_n x_m}$，很容易验证良定义性。

同样对于$\mathfrak{a}-$滤过，有$G(M) = \bigoplus_{n=0}^\infty M_n/M_{n+1}$，是一个$G(A)$分次模。此时记$G_n(M) = M_n/M_{n+1}$

10.22 设A是**Noetherian**环，$\mathfrak{a}$是A的理想。

1. $G_\mathfrak{a}(A)$是**Noetherian**的。

2. $G_\mathfrak{a}(A)$与$G_{\hat{\mathfrak{a}}}(\hat{A})$是分次环同构。

3. 如果M是有限生成$A-$模，(M_n)是稳定$\mathfrak{a}-$滤链。那么$G(M)$是有限生成$G(A)-$模。

证：

10.22.1 Noetherian性保证了$\mathfrak{a}$有限生成，设为$x_1,\cdots,x_s$. 记$\overline{x_1},\cdots$为它们在$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$中的像。于是$G(A)=(A/\mathfrak{a})[\overline{x_1},\cdots]$，由Hilbert基定理即证。

10.22.2 由于$\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}\cong\hat{\mathfrak{a}}^n/\hat{\mathfrak{a}}^{n+1}$：10.15.3

10.22.3 设n_0满足$\forall r\geq 0$，$M_{n_0+r}=\mathfrak{a}^rM_{n_0}$. 那么$G(M)$是由$\oplus_{n\leq n_0}G_n(M)$作为模生成的。每个$G_n(M)$都是Noetherian模，并且被$\mathfrak{a}$零化，于是是有限生成$A/\mathfrak{a}-$模。

因此$G(M)$是有限生成$A/\mathfrak{a}$模，于是是有限生成$G(A)-$模。

最后一个主要的结果是Noetherian环的$\mathfrak{a}-$完备化还是Noetherian环。

10.23 设$\phi:A\to B$是群滤链的同态（即$\phi(A_n)\subseteq B_n$），以及
$G(\phi):G(A)\to G(B),\hat{\phi}:\hat{A}\to\hat{B}$，（这里是关联分次群和完备群的同态）

那么:

$G(\phi)$单 $\implies$ $\hat{\phi}$单。

$G(\phi)$满 $\implies$ $\hat{\phi}$满。

证:

考虑如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_n/A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "G_n(\phi)"'] & A/A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n+1}"'] & A/A_n \arrow[r] \arrow[d, "\phi_n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_n/B_{n+1} \arrow[r] & B/B_{n+1} \arrow[r] & B/B_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

于是有如下正合列:

$$0\to\ker G_n(\phi)\to\ker\phi_{n+1}\to\ker\phi_n\to\text{coker }G_n(\phi)\to\text{coker }\phi_{n+1}\to\text{coker }\phi_n\to 0$$

那么对于两个情况$G_n(\phi)$分别是单的和满的（它是$G(\phi)$的分量）

那么应用归纳（$\phi_0:0\to 0$既单又满），追图可以说明任何ϕ_n是单的（满的resp.）

逆向极限的左正合已经足够说明单的情况了；对于满的情况，由于coker $G_n(\phi)=0$，于是$\ker\phi_{n+1}\to\ker\phi_n$是满的。

取逆向极限并运用10.2即证。

我们下面建立一个结果，它是10.22.3的部分逆：

10.24 设A是环，$\mathfrak{a}$是理想，M是$A-$模。M_n是$\mathfrak{a}-$滤链。

如果A在$\mathfrak{a}-$拓扑下已经是完备的，M在滤链拓扑下是**Hausdorff**的，并且$G(M)$是有限生成$G(A)$模，那么M是有限生成A模。

证：

将$G(M)$中的生成元取出，并分解为齐次部分，设为$\xi_i, 1\le i\le r, n(i)$依次为次数，并且是$x_i\in M_{n(i)}$的像。

设F^i是A模A，配备了稳定滤链：$F^i_k=\mathfrak{a}^{k+n(i)}$，取$F=\oplus_{i=1}^r F^i$

那么将F^i中的1映为x_i定义了同态$\phi: F\to M$，并且它是群滤链同态。

$G(\phi): G(F)\to G(M)$是$G(A)$模的同态。由构造$G(F)\to G(M)$是满射：覆盖住了每个生成元ξ_i。

于是由10.23.2，$\hat{\phi}$也是满的。因此对于交换图：

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\phi} & M \\ \alpha\downarrow & & \beta\downarrow \\ \hat{F} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \hat{M} \end{array}$$

，$\hat{F}\cong F$（A完备），β是单射。

于是$\hat{\phi}$是满射推出了ϕ也是，从而$x_1,\cdots,x_r$生成了M，得证。

Cor.10.25 在10.24的前提下，如果$G(M)$是**Noetherian**$G(A)$模，那么M是**Noetherian** $A-$模。

证：对于子模$M' \leq M$，取$M'_n = M_n \cap M'$，得到了子模M'的$\mathfrak{a}-$滤链。嵌入$M'_n \hookrightarrow M_n$诱导了单同态$M'_n/M'_{n+1} \to M_n/M_{n+1}$。于是进一步诱导了嵌入$G(M') \hookrightarrow G(M)$。

由于$G(M)$是Noetherian的，那么$G(M')$有限生成。并且$\cap M'_n \subseteq \cap M_n = 0$，因此可以使用10.24即说明$M'$有限生成。

于是我们得到了重要结果：

10.26 环完备化保持Noetherian性。

证：由10.22 $G_{\mathfrak{a}}(A) = G_{\hat{\mathfrak{a}}}(\hat{A})$是Noetherian的环，从而是Noetherian$G_{\mathfrak{a}}(A)$模。

那么在10.25中取$M = \hat{A}$，被$\hat{\mathfrak{a}}^n$滤链定义出拓扑，当然是Hausdorff的（完备），于是$\hat{A}$是Noetherian$A-$模。

每个理想当然是$A-$子模，而$A-$有限生成当然能够说明$\hat{A}-$有限生成，得证。

10.27 ANoetherian $\Longrightarrow$ $A[[x_1, \cdots, x_r]]$Noetherian。

10.4(E)

1. 考虑$\alpha_n : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} : 1 \mapsto p^{n-1}$，$A = \oplus_1^\infty \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，$B = \oplus_1^\infty \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

$\alpha = \oplus \alpha_n : A \to B$。证明$A$的$p-$完备化仍是$A$，但对$B$的$p-adic$拓扑诱导出的$A$上拓扑作完备化得到的是$\prod_1^\infty \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。

作为推论，证明$p-adic$完备化在$\mathbb{Z}$模范畴内不是正合函子。

证：

$p-adic$完备化：只需注意到$A/(p^kA) = A (k \geq 1)$，于是$\varprojlim A/(p^kA) = A$

诱导拓扑完备化：考虑B的滤链：$p^kB=\oplus p^k\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

那么$\alpha^{-1}(p^kB)=\oplus\alpha_n^{-1}(p^k\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})=\oplus_{n>k}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，因此完备化后结果为$\varprojlim\oplus_{n=1}^{k}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

。

我们指出一个一般结果：$\varprojlim\oplus_{i=1}^{n}R_i=\prod R_i$. 这是很简单的：因为$\oplus_{i=1}^{n}R_i=\prod_{i=1}^{n}R_i$，于是利用直积的泛性质可以知道这个$\varprojlim$只不过是离散型$R_1,R_2,\cdots$的极限罢了（见下图）。而熟知它是$\prod R_i$.

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots & \longrightarrow & R_1\oplus R_2\oplus R_3 & \longrightarrow & R_1\oplus R_2 & \longrightarrow & R_1\\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & & R_3 & & R_2 & & \end{array}$$

因此我们得到了结论。

推论只需要考虑：$0\to A\to B\to\oplus p\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}\cong B\to 0$即可。

2. 记号同1，令$A_k=\alpha^{-1}(p^kB)=\oplus_{n>k}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，说明对于序列$0\to A_k\to A\to A/A_k$，$\varprojlim$不是右正合的，并计算$\varprojlim^1A_n$。

证：

通过直接验证发现$\varprojlim A_k=0$

于是由正合列$0\to 0\to A\to\prod\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\to\varprojlim^1A_n\to\varprojlim^1A$

然而$\varprojlim^1A$为0，因为A是满射系统。

那么$\varprojlim^1A_n=(\prod\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/(\bigoplus\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$。

3. 设A是**Noetherian**环，$\mathfrak{a}$是理想，M是有限生成$A-$模。利用**Krull**定理和**3.E14**证明：$\cap\mathfrak{a}^nM=\cap_{\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{a}}\ker(M\to M_{\mathfrak{m}})$。

作为推论得到：$\hat{M}=0\iff Supp(M)\cap V(\mathfrak{a})=\varnothing$

证：记$N=\cap\ker(M\to M_{\mathfrak{m}})$，那么$N_{\mathfrak{m}}=0,\forall\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{a}$。于是由3.E14，$N=\mathfrak{a}N$，从而很容易验证$N\subseteq\cap\mathfrak{a}^nM$。

反过来对于任何$x\in\cap\mathfrak{a}^nM$，由Krull定理x被$1+a,a\in\mathfrak{a}$零化。对于任何$\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{a}\ni a$，当然$1+a\notin\mathfrak{m}$，于是$x\in\ker(M\to M_{\mathfrak{m}})$

推论：

由Nakayama引理和10.15：$\hat{M}=0\iff\hat{M}=\hat{\mathfrak{a}}\hat{M}\iff M=\mathfrak{a}M$，这里是因为$M/\mathfrak{a}M=\hat{M}/\hat{\mathfrak{a}}\hat{M}$

由本题结果，这等价于$M=\cap_{\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{a}}\ker(M\to M_{\mathfrak{m}})$。

$\implies$. 若$\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}$，$M_{\mathfrak{p}}\neq0$，于是进一步$M_{\mathfrak{m}}\neq0:\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{p}\supseteq a$。这是不可能的，因为$m/1=0,\forall m\in M$

$\impliedby$. $\forall\mathfrak{m}\supseteq a$，由于$Supp(M)\cap V(\mathfrak{a})=0$，于是$M_{\mathfrak{m}}=0$，从而$\ker(M\to M_{\mathfrak{m}})=0$

（Remark. $\hat{M}$可以视作M的某种在$V(\mathfrak{a})$附近的Taylor展开，于是上述结果说明了M在$V(\mathfrak{a})$的邻域附近被其Taylor展开唯一决定）

4. 设A是**Noetherian**环，$\mathfrak{a}$是理想，$\hat{A}$是$\mathfrak{a}-$完备化。

证明：x不是零因子$\implies$ $\hat{x}$不是零因子。

证：考虑$0\to A\xrightarrow{a\mapsto xa}A$，由完备化的正合性，$0\to\hat{A}\xrightarrow{\hat{a}\mapsto\hat{x}\hat{a}}\hat{A}$仍然正合，得证。

注：这不能说明A是整环$\implies$ $\hat{A}$是整环。

5. 设A是**Noetherian**环，$\mathfrak{a},b$是理想，$^{\mathfrak{a}}$代表$\mathfrak{a}-$完备化。如果M是有限生成模，证明$(M^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}}=M^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$

证：

由10.13：

$M^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}\cong A^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}\otimes_A M$，
$(M^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}}\cong A^{\mathfrak{b}}\otimes_A(A^{\mathfrak{a}}\otimes_A M)\cong(A^{\mathfrak{b}}\otimes_A A^{\mathfrak{a}})\otimes_A M\cong(A^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}}\otimes_A M$

因此只需$A^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}\cong(A^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}}$。

现在考虑$0\to\mathfrak{b}^m\to A\to A/\mathfrak{b}^m\to 0$，做$\mathfrak{a}-$完备化得到：
$0\to(\mathfrak{b}^m)^{\mathfrak{a}}\to A^{\mathfrak{a}}\to(A/\mathfrak{b}^m)^{\mathfrak{a}}\to 0$。

由10.15，$(\mathfrak{b}^m)^{\mathfrak{a}}\cong\mathfrak{b}^m A^{\mathfrak{a}}$，正合性保证$(A/\mathfrak{b}^m)^{\mathfrak{a}}\cong A^{\mathfrak{a}}/\mathfrak{b}^m A^{\mathfrak{a}}$

于是：

$$(A^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}}\cong\varprojlim_m A^{\mathfrak{a}}/\mathfrak{b}^m A^{\mathfrak{a}}\cong\varprojlim_m(A/\mathfrak{b}^m)^{\mathfrak{a}}$$
$$\cong\varprojlim_m\varprojlim_n\frac{A}{\mathfrak{b}^m}\Big/\frac{\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^m}{\mathfrak{b}^m}\cong\varprojlim_m\varprojlim_n\frac{A}{\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^m}$$

然而它同构于$\varprojlim_n A/(\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n)$（这点可以从极限的泛性质推出）。

又考虑到$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{2n}\subseteq\mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n\subseteq(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^n$，于是由完备化的定义，它当然同构于$A^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$。

6. 设A是**Noetherian**环，$\mathfrak{a}$是理想，$\mathfrak{a}\in J(A)\iff$每个极大理想在$\mathfrak{a}$拓扑中是闭的。

这样的拓扑环称为**Zariski**环。

证：

$\Longrightarrow$.$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$，于是$A - \mathfrak{m} = \cup_{x \in A-\mathfrak{m}} x + \mathfrak{a}$，从而开。

$\Longleftarrow$. $\mathfrak{m}$在$\mathfrak{a}$拓扑中闭，那么$\exists n, 1 + \mathfrak{a}^n \subseteq A - \mathfrak{m}$。由于$\mathfrak{m}$极大，$\mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{m}$或$\mathfrak{a}^n + \mathfrak{m} = (1)$，但后者和$n$的选择矛盾。

因此$\mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{m}$。然而$\mathfrak{m}$是素理想，于是$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$。从而说明了$\mathfrak{a} \subseteq J(A)$

7. 设A是**Noetherian**环，$\mathfrak{a}$是理想。$\hat{A}$是$\mathfrak{a}-$完备化。证明：$\hat{A}$在A上忠实平坦 $\Longleftrightarrow$ A是**Zariski**环。

证：

由10.14，$\hat{A}$是平坦的。

$\Longrightarrow$. 由于忠实平坦，那么由3.E16.5，对任何有限生成$A-$模$M \to \hat{M} \cong \hat{A} \otimes_A M$是单射。

于是对于$M = A/\mathfrak{m}$，$\ker = \cap \mathfrak{a}^n(A/\mathfrak{m}) = 0$。如果$\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{m}$，取$a \in \mathfrak{a} - \mathfrak{m}$。

那么a在$A/\mathfrak{m}$中是单位。从而$\mathfrak{a}^n(A/\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m}, \forall n$。矛盾。

于是$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$，进而$\mathfrak{a} \subseteq J(A)$

$\Longleftarrow$.

反过来，同上说明$A/\mathfrak{m} \to \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$是单射，于是这说明了$\hat{\mathfrak{m}} \neq (1)$. 由3.E16.3这说明了忠实平坦性。

8. 设A是$\mathbb{C}^n$在原点处的局部环：$f/g \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n], g(0) \neq 0$。取$B$为在原点的某个邻域处收敛$z_1, \cdots, z_n$的全体幂级数构成的环，$C$为形式幂级数环$\mathbb{C}[[z_1, \cdots, z_n]]$。那么$A \subset B \subset C$

证明：B是局部环，它对极大理想拓扑作完备化是C。如果B是**Noetherian**的，那么B是$A-$平坦的。

证：

由熟知的Lagarange反演，$f \in B$是单位 $\Longleftrightarrow$ 其常数项非零。

从而考虑理想$\mathfrak{m} =< z_1, \cdots, z_n >$，$A - \mathfrak{m}$的元素均为单位，于是由1.6得证。

由于$A \subseteq B \subseteq C$，注意$A/(\mathfrak{m} \cap A)^n \cong B/\mathfrak{m}^n$，而$\varprojlim A/(\mathfrak{m} \cap A)^n$正是$A$对理想$< x_1, \cdots, x_n >$做完备化的结果，正是$C$。

从而对B做完备化后的结果也是C。

注意到A, B都是Zariski环，那么由10.E7，C在A, B上都是忠实平坦的。

另外注意到$A \to \hat{A}$可分解为：$A \to B \to \hat{B}(= \hat{A})$，由3.E17即得$A \to B$是平坦的。

Hensel引理

9.（Hensel引理） 设A是局部环，A是$\mathfrak{m}-$完备的。对于$f \in A[x]$，记$\bar{f} \in (A/\mathfrak{m})[x]$为它的像。

如果f是首一的n次多项式，且存在互素的首一$\bar{g}, \bar{h} \in (A/\mathfrak{m})[x], \bar{f} = \bar{g}\bar{h}$，那么可以将这些多项式提升到$A[x]$中，满足$f = gh$

证：

设$\deg \bar{g} = r, \deg \bar{f} = n - r$。

假定我们归纳地构造出了$g_k, h_k \in A[x]$，且$g_k h_k - f \in \mathfrak{m}^k A[x]$。

由于$\bar{g}, \bar{h}$是互素的，可以找到$\bar{a_p}, \bar{b_p}$，满足次数分别不超过$n - r, r$，使得$\bar{a_p}\bar{g_k} + \bar{b_p}\bar{h_k} = \bar{x^p} = x^p$，其中$p \in \{1, \cdots, n\}$

设$g_k h_k - f = \sum_{p=0}^{n} c_p x^p$，$a_p g_k + b_p h_k - x^p = r_p \in \mathfrak{m}[x]$

因此这样我们取$g_{k+1}=g_k+\sum c_pb_p, h_{k+1}=h_k+\sum c_pa_p$

有$g_{k+1}h_{k+1}-f=\sum c_px^p-\sum c_px^p-\sum c_pr_p+(\sum c_pb_p)(\sum c_pa_p)$

由于$c_p\in\mathfrak{m}^k, r_p\in\mathfrak{m}[x]$，$g_{k+1}h_{k+1}-f\in\mathfrak{m}^{k+1}[x]$。因此归纳构造完成。

另一方面$g_k\equiv g_{k+1}\mod\mathfrak{m}^k$，$h$同理。于是序列$\{g_k\}$的系数在$\mathfrak{m}-$拓扑下一致地收敛到某个$g$，$h$同理。

注意到$g\equiv g_k\mod\mathfrak{m}^k$，于是$\forall k, f-gh\equiv f-g_kh_k\equiv 0\mod\mathfrak{m}^k$，但是$A$完备意味着$\cap\mathfrak{m}^k=0$，故$f=gh$

10.1 Hensel引理推论：记号同9不变，$\bar{f}$如果在$A/\mathfrak{m}$中有单根α，那么存在一个f的根a满足α是a在$A/\mathfrak{m}$中的像。

10.2 证明在$\mathbb{Z}_7$中x^2-2有解。

10.3 设$f(x,y)\in k[x,y]$，$f(0,y)$存在一个单根$y=a_0$。证明存在形式幂级数$y(x)=\sum a_nx^n$使得$f(x,y(x))=0$

证：10.1显然。

10.2 取$A=\mathbb{Z}_7,\mathfrak{m}=(7), A/\mathfrak{m}\cong\mathbb{Z}_7/(7\mathbb{Z}_7)\cong\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\cong\mathbb{F}_7$，注意$x^2-2$在$\mathbb{F}_7$中有单根3，于是运用10.1即证。

10.3 取$A=k[[x]],\mathfrak{m}=(x), k[x,y]\subseteq A[y]$。

$f(0,y)$在$(A/\mathfrak{m})[y]$中的像设为$\bar{f}$，那么单根诱导出了$A[x]$中的$f=(y-a)h(x,y)$.

于是取$y(x)=a$即满足要求。

10.11 即使假定了A是局部的，$\hat{A}$是有限生成$A-$模，10.26的逆仍然不成立。

证：取A为$x=0$处的光滑函数芽，这当然是局部环。

利用Taylor展开，自然得到$\mathfrak{m}^k$为在原点处直至$k-1$阶导数都为0的函数构成的理想。

于是很容易验证$A/\mathfrak{m}^k=\mathbb{R}[x]/x^k$，从而$\hat{A}=\mathbb{R}[[x]]$当然是有限生成$A-$模，但$A$不是。

10.12 如果A**Noetherian，**那么$A[[x_1,\cdots,x_n]]$是忠实平坦$A-$代数。

证：

由2.E5和2.E8.2，$A\to A[x_1,\cdots,x_n]$是平坦的，1.E5.4保证了$Spec(A[[x_1,\cdots,x_n]])\to Spec(A[x_1,\cdots,x_n])$是满的，于是由3.E16.3得到忠实平坦。

那么考虑$A\to A[x_1,\cdots,x_n]\to A[[x_1,\cdots,x_n]]$，由2.E8.2得证。

11. 维数理论

11.0 引言

代数几何的一个重要问题就是如何将簇的维数这一重要参量以代数形式表示出来（而不是依赖于流形的概念）。维数这一概念应当是一个局部概念（在某点附近），因此正如之前的内容所指出的，在这里研究局部环的维数是一件重要的事情。

这一章将给出一个非常成熟的Noetherian局部环的维数理论。而本章主定理将指出这个理论内的三种不同维数的等价性。这三种维数当中有两种的几何意义是相当直观的，而第三种（利用Hilbert函数）则不然。尽管如此，这种定义有着相当大的优势，因此在历史上也很早被引入。

本章还将处理正则局部环，这是代数簇的非奇异点的代数阐释。最后我们将指出对于代数簇，局部维数和超越度有着紧密的联系。

11.1 Hilbert函数

对于一个Noetherian分次环$A=\oplus_{n=0}^{\infty}A_n$，由10.7$A_0$是Noetherian环，$A$是有限生成$A_0$代数。设它们的齐次生成元为$x_1,\cdots,x_s$，次数分别为$d_1,\cdots,d_s>0$。

对于一个有限生成分次$A-$模，M也有一组齐次生成元$m_1,\cdots,m_r,r_j=\deg m_j$。

此时每个M_n中的元素都一定可以写成形式$\sum_j f_j(x)m_j$，$f_j(x)\in A_{n-r_j}$，然而由A的有限生成性，$f_j(x)=f_j(x_1,\cdots,x_s)$，且满足它是$n-r_j$齐次的。

因此M_n是有限生成A_0模：它由全体$g_j(x)m_j$的形式生成：其中对于固定的j，g_j遍历所有x_i构成的$n-r_j$次单项式。

定义（Hilbert函数）对于全体有限生成A_0-模上的$\mathbb{Z}-$值加性函数λ，称A-有限生成模M的Poincare级数为$\lambda(M_n)$的生成函数，即：

$$P(M,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(M_n)t^n。$$

11.1（Hilbert, Serre）$P(M,t)$是一个t的有理函数，并且一定具有形式 $f(t)/\prod_{i=1}^{s}(1-t^{k_i}),f(t)\in\mathbb{Z}[t]$。这里的$s,k_i$定义同前，分别为$A$的齐次生成元个数和它们的次数。

证：

我们对A作为A_0-代数的生成元个数s进行归纳。

奠基是简单的：$s=0$意味着$A_n=0,n>0$，即$A=A_0$。从而M是有限生成A_0-模，于是对于充分大n一定有$M_n=0$：因为一个$n-$齐次的元素最多仅能生成M_n，故只有有限个M_n非0。于是$P(M,t)$自动成为多项式。

假定$s>0$，且对于$s-1$命题成立。x_s的乘法作用诱导了A_0-模同态$M_n\to M_{n+k_s}$.

于是我们有正合列$0\to K_n(=\ker)\to M_n\to M_{n+k_s}\to L_{n+k_s}(=\operatorname{coker})\to 0$

取$K=\oplus_n K_n,L=\oplus_n L_n$，它们都是有限生成$A-$模（因为是$M$的子（Noetherian性）/商模），由于它们都能被x_s零化，于是都是有限生成$A_0[x_1,\cdots,x_{s-1}]-$模。

将λ作用到这个正合列上，由2.11，有$\lambda(K_n)-\lambda(M_n)+\lambda(M_{n+k_s})-\lambda(L_{n+k_s})=0$（注意它们当然都是有限生成$A_0-$模）

两端乘上t^{n+k_s}，并对n求和，得到：
$t^{k_s}P(K,t)-t^{k_s}P(M,t)+P(M,t)-P(L,t)=g(t)$，其中$g(t)\in\mathbb{Z}[t]$，是为了配凑最后两项而出现的。

于是$(1-t^{k_s})P(M,t)=P(L,t)-t^{k_s}P(K,t)+g(t)$。对$L,K$应用归纳假设：它们是有限生成$A_0[x_1,\cdots,x_{s-1}]-$模，当然$A_0[x_1,\cdots,x_s]$是由$x_1,\cdots,x_{s-1}$生成的$A_0-$代数，从而得证。

（维数：d）记$P(M,t)$在极点$t=1$处的阶数为$d(M)$（**w.r.t.** λ）

特别地：这定义了Noetherian分次环的维数$d(A)$。

11.2 如果$\forall i,k_i=1$，那么对于充分大n，$\lambda(M_n)$是一个n的实系数多项式，次数为$d(M)-1$。

证：由11.1，$\lambda(M_n)$是$f(t)\cdot(1-t)^{-s}$的n次项级数。约去$f(t)$中的$(1-t)$项后我们可以假设$s=d(A),f(1)\neq 0$。

设$f(t)=\sum_{k=0}^{N}a_kt^k$，熟知$(1-t)^{-d}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{d+k-1}{d-1}t^k$，于是：

$$\lambda(M_n)=\sum_{k=0}^{N}a_k\binom{d+n-k-1}{d-1}$$对所有$n\geq N$成立，而它当然是$d-1$次多项式。

11.2中的多项式称为Hilbert函数。

11.3 如果$x\in A_k$且不是M的零因子，那么$d(M/xM)=d(M)-1$

证：在11.1的证明中令x_s变为x，那么$K=0$，于是结论自然成立。

例.下面我们在A_0是Artin环的情况下使用11.1，$\lambda(M)$定义为模的长度$l(M)$（由6.9它符合要求）

令$A=A_0[x_1,\cdots,x_s]$，A_0是Artin环，$x_1,\cdots,x_s$是独立的未定元，那么A_n是自由A_0模，由$x_1^{m_1}\cdots x_s^{m_s},\sum m_i=n$生成。这样的生成元有$\binom{s+n-1}{s-1}$个，于是
$P(A,t)=(1-t)^{-s}$

11.4 **设A是Noetherian局部环，$\mathfrak{m}$是极大理想，$\mathfrak{q}$是$\mathfrak{m}-$准素理想，M是有限生成$A-$模，(M_n)是稳定$\mathfrak{q}-$滤链。那么：**

1. **M/M_n总是有限长的。**

2. **对于充分大的n，这个长度是一个多项式$g(n)$，其中$\deg g\leq s$，s是$\mathfrak{q}$生成元个数的最小值。**

3. **$\deg g$和g的首项系数仅和$M,\mathfrak{q}$相关，与滤链的选择无关。**

证：

11.4.1 取$G(A)=\oplus\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1},G(M)=\oplus M_n/M_{n+1},G_0(A)=A/\mathfrak{q}$是Artin局部环（8.5），$G(A)$是Noetherian环，$G(M)$是有限生成$G(A)-$模（10.22）

每个$G_n(M)$都被$\mathfrak{q}$零化，于是是Noetherian$A/\mathfrak{q}$模，从而有限长（因为$A/\mathfrak{q}$是Artin环，于是$G_n(M)$作为有限生成$A/\mathfrak{q}-$模也是Artin的，于是结合Noetherian性得证）

那么$l(M/M_n)=\sum G_n(M)$，从而也是有限长的。

11.4.2

设$x_1,\cdots,x_s$生成了$\mathfrak{q}$，那么$\bar{x_1},\cdots,\bar{x_s}$（在$\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$中的像）作为$A/\mathfrak{q}-$代数生成了$G(A)$，且这些生成元都是齐次的（次数为1），于是由11.2，$l(M_n/M_{n+1})=f(n)$，其中
$\deg f\leq s-1$（回想极点$t=1$的阶数不超过s），因此
$l(M/M_{n+1})-l(M/M_n)=l(M_n/M_{n+1})$是不超$s-1$次多项式，于是$l(M/M_n)$充分大时是不超$s$次多项式，记为$g(n)$。

11.4.3

对于另一个滤链$\tilde{M_n}$，对应的$l(M/\tilde{M_n}) = \tilde{g}(n)$，由10.6注意$M_{n+n_0} \subseteq \tilde{M_n}, \tilde{M_{n+n_0}} \subseteq M_n$，于是$g(n+n_0) \geq \tilde{g}(n)$，$\tilde{g}(n+n_0) \geq g(n)$，故$\lim g/\tilde{g} = 1$，于是结论自然。

定义（特征多项式）记对应$(\mathfrak{q}^n M)$的多项式$g(n)$为特征多项式$\chi_{\mathfrak{q}}^M(n) = l(M/\mathfrak{q}^n M)$。特别地，对于$M = A$，称这个多项式为准素理想$\mathfrak{q}$的特征多项式。

那么将11.4应用到$M = A$的情况就有：

11.5 对于充分大的n，$l(A/\mathfrak{q}^n)$是一个不超过s次的多项式$\chi_{\mathfrak{q}}(n)$，其中s是$\mathfrak{q}$的最小生成元个数。

11.6 条件同11.4，$\deg \chi_{\mathfrak{q}} = \deg \chi_{\mathfrak{m}}$，i.e. 次数是一个和准素理想选择无关的量。

证：只需注意到$\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{m}^r$，于是$\chi_m(n) \leq \chi_{\mathfrak{q}}(n) \leq \chi_{\mathfrak{m}}(rn)$，于是由多项式性质显然。

这样的$\chi_{\mathfrak{q}}(n)$我们记为$d(A)$，回到10.1，10.2的记号实际上我们取$d(A) = d(G_{\mathfrak{m}}(A)) = d(G_{\mathfrak{q}}(A))$.

11.2 Noetherian局部环的维数理论

维数理论是指研究不同方式定义出的维数之间的联系。

对于Noetherian局部环$(A, \mathfrak{m}, k)$，我们现在有如下三种维数：

$\delta(A)$ =最小的$\mathfrak{m}$准素理想生成元个数；

$d(A) = d(G_{\mathfrak{m}}(A))$；

Krull维数$\dim A$。

主定理（11.14）在Noetherian局部环$(A, \mathfrak{m}, k)$中上述三种维数相等。

我们的证明方式是通过证明$\delta(A) \geq d(A) \geq \dim A \geq \delta(A)$

11.7 $\delta(A) \geq d(A)$：见11.4,11.5.

接下来我们证明一个类似11.3的命题：

11.8 记号同前，M是有限生成$A-$模，$x \in A$是一个M的非零因子，$M' = M/xM$，那么$\deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M'} \leq \deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M} - 1$。

证：设$N = xM$，作为$A-$模$N \cong M$。令$N_n = N \cap \mathfrak{q}^n M$，那么有正合列：

$0 \to N/N_n \to M/\mathfrak{q}^n M \to M'/\mathfrak{q}^n M' \to 0$

记$g(n) = l(N/N_n)$，那么$g(n) - \chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n) + \chi_{\mathfrak{q}}^{M'}(n) = 0$对于充分大$n$成立。而由Artin-Rees引理：$(N_n)$是稳定的$\mathfrak{q}-$滤链。由于$N \cong M$，11.4.3表明$g(n), \chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n)$的首项相同，于是得证。

Cor.11.9 对于Noetherian局部环A，x是非零因子，那么$d(A/(x)) \leq d(A) - 1$： 代入$M = A$。

11.10 $d(A) \geq \dim A$

证：对$d = d(A)$归纳，如果$d = 0$，对于充分大的n有$l(A/\mathfrak{m}^n)$恒定，于是对于充分大的n有$\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$，从而由Nakayama引理有$\mathfrak{m}^n = 0$。于是考虑Noetherian局部环分类定理，知$A$是Artin环，从而$\dim A = 0$。

假定$d > 0$，$\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r$是素理想链，设$x \in \mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_0$，$A' = A/\mathfrak{p}_0$，$x'$是$x$在$A'$中的像。那么$x' \neq 0, A'$是整环，于是由11.9：$d(A'/(x')) \leq d(A') - 1$。

对于A'的极大理想$\mathfrak{m}'$，当然$A'/\mathfrak{m}'^n$是$A/\mathfrak{m}$的像。于是$l(A/\mathfrak{m}^n) \geq l(A'/\mathfrak{m}'^n)$，于是$d(A) \geq d(A')$。（注意充分大情况$l$正是$\chi$）

从而$d(A'/(x')) \leq d(A) - 1 = d - 1$。于是由归纳假设$A'/(x')$中的素理想链长度不超过$d-1$。考虑$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$的同态像构成的素理想链，它的长度是$r-1$，于是$r - 1 \leq d - 1$，即$r \leq d$。

Cor.11.11 对于局部**Noetherian**环，$\dim A$是有限的。

定义（素理想的高）称素理想$\mathfrak{p}$的高为全体终止于$\mathfrak{p}$的素理想升链长度的上确界，即 $height(\mathfrak{p}) = \dim A_{\mathfrak{p}}$

于是由11.11立刻得到：

Cor.11.12 Noetherian环中每个素理想高度都是有限的，于是Noetherian环中的全体素理想满足d.c.c.

定义（素理想的深）同样我们可以对偶的定义素理想$\mathfrak{p}$的深：全体$\mathfrak{p}$出发的素理想升链长度的上确界，即$depth(\mathfrak{p}) = \dim A/\mathfrak{p}$。

不同于11.12的结果，在11.E4中将会看到在Noetherian环（非局部）中素理想的深度可能无限：注意这不和a.c.c.矛盾！

11.13 对于**Noetherian**局部环A，存在一个$\mathfrak{m}-$准素理想由$\dim A$个元素生成。于是$\dim A \geq \delta(A)$

证：

归纳地构造$x_1, \cdots, x_i$使得每个包含$(x_1, \cdots, x_i)$的素理想高度都至少为i。

假定$i > 0$，$x_1, \cdots, x_{i-1}$已经构造（$i = 1$时就是没有任何已存在的x，接下来将$(x_1, \cdots, x_{i-1})$视作0）

设$\mathfrak{p}_j(1 \leq j \leq s)$是全体高度恰为$i-1$且包含$(x_1, \cdots, x_{i-1})$的素理想中的极小元（这个极小是否没有必要？）。由于$i-1 < \dim A = height(\mathfrak{m})$，当然$\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}_j$。于是由1.11，$\mathfrak{m} \neq \cup \mathfrak{p}_i$。

取$x_i \in \mathfrak{m} - \cup \mathfrak{p}_i$，$\mathfrak{q}$是任意包含$(x_1, \cdots, x_i)$的素理想。那么$\mathfrak{q}$包含某个$\mathfrak{p}_j$，于是自然高度至少为$i$。

这样我们构造出了$(x_1, \cdots, x_{\dim A})$，对于包含它的素理想，它的高度超过了$\dim A$，于是只能$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$，自然$r((x_1, \cdots, x_{\dim A})) = \mathfrak{m}$，于是即说明了$(x_1, \cdots, x_{\dim A})$是准素理想。

11.14（维数定理）$d(A) = \delta(A) = \dim A$

接下来给出几个推论：

Cor.11.15 $\dim A \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$

证：设$x_i \in \mathfrak{m}$的像是$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$的基，那么它们生成了$\mathfrak{m}$（2.8），于是由11.13
$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \geq \dim A$

Cor.11.16 **对于一般的Noetherian环**A**，**$x_1, \cdots, x_r \in A$**。每个**$(x_1, \cdots, x_r)$**的极小素理想高度都不超过**r**。**

证：在$A_\mathfrak{p}$中$(x_1, \cdots, x_r)$是$\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$准素的，于是$r \geq \dim A_\mathfrak{p} = height(\mathfrak{p})$。

Cor.11.17（**Krull主理想定理**）A**是Noetherian环，**$x \in A$**既不是零因子也不是单位，那么**(x)**的所有极小素理想的高都是1.**

证：由11.16，它们的高度不会超过1。如果某个素理想的高度是0，那么它是包含0的极小素理想，于是从属于0（4.6）从而由4.7，其元素都是零因子，矛盾。

Cor.11.18 **对于局部Noetherian环**A**，**$x \in \mathfrak{m}$**且不是零因子，那么**
$\dim A/(x) = \dim A - 1$。

证：由11.9,11.14：$\dim A/(x) \leq \dim A - 1$，另一方面设$x_i \in \mathfrak{m}(1 \leq i \leq \dim A/(x))$满足其在$A/(x)$的像生成了一个$\mathfrak{m}/(x)-$准素理想（11.13）。那么将其拉回，$(x, x_1, \cdots, x_{\dim A/(x)})$是$\mathfrak{m}-$准素理想，从而$d+1 \geq \dim A$。

Cor.11.19 A**是局部Noetherian环，**$\hat{A}$**是**$\mathfrak{m}-$**完备化，那么**$\dim \hat{A} = \dim A$。**注意10.16保证这个命题是合理的。**

证：由10.15：$A/\mathfrak{m}^n \cong A/\hat{\mathfrak{m}}^n$，于是$\chi_{\mathfrak{m}}(n) = \chi_{\hat{\mathfrak{m}}}(n)$。

对于Noetherian局部环A，如果$x_1, \cdots, x_{\dim A}$恰好生成了一个$\mathfrak{m}-$准素理想（$\delta(A)$中最小值取到的情况），称它们为一个参数系。

11.20 **对于Noetherian局部**A**的一组参数系**$x_1, \cdots, x_d$，$\mathfrak{q} = (x_1, \cdots, x_d)$，$f(t_1, \cdots, t_d)$**是**$A$**的**$s$**次齐次多项式。如果**$f(x_1, \cdots, x_d) \in \mathfrak{q}^{s+1}$，**那么**$f$**的所有系数都是**$\mathfrak{m}$**中的元素。**

证：

考虑如下满同态$\alpha : (A/\mathfrak{q})[t_1, \cdots, t_d] \twoheadrightarrow G_{\mathfrak{q}}(A)$：$t_i \mapsto \bar{x}_i$

于是条件意味着$\bar{f}(t_1, \cdots, t_d) \in \ker \alpha$。

如果f存在某个系数是单位，那么$\bar{f}$不是零因子（1.E3），于是：

$d(G_{\mathfrak{q}}(A)) \leq d((A/\mathfrak{q})[t_1, \cdots, t_d]/(\bar{f}))$（$\bar{f} \in \ker$）

$= d((A/\mathfrak{q})[t_1, \cdots, t_d]) - 1(11.3)$
$= d - 1(Ex.11.3)$

但是由11.14，$d(G_{\mathfrak{q}}(A)) = \dim A = d$，矛盾。

于是f的系数都不是单位，从而系数全部落入了$\mathfrak{m}$。

当A包含某个和$A/\mathfrak{m}$同构的域时k，11.20有一个简单的形式：

11.21 $k \subset A$**是一个在映射**$k \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$**下同构于**$A/\mathfrak{m}$**的域。**$x_1, \cdots, x_d$**是一组参数系，那么它们在**$k$**上代数无关。**

证：若对某个k系数多项式f，$f(x_1, \cdots, x_d) = 0$，如果$f \not\equiv 0$，那么可以取出$f = f_s + higher\ terms$，并且$f_s \not\equiv 0$，并且齐次（次数为s）

运用11.20，f_s的系数都在$\mathfrak{m}$中，然而f_s系数都在k中，于是只能有$f_s \equiv 0$，矛盾。

11.3 正则局部环

正如11.0中叙述的那样，我们希望区分代数簇上的奇点和非奇点，我们看到它在代数上的反映正是接下来将要介绍的正则局部环。

11.22（正则局部环：分次环判别）对于d**维的Noetherian局部环**$(A, \mathfrak{m}, k)$**，以下等价：**

1. $G_{\mathfrak{m}}(A) \cong k[t_1, \cdots, t_d]$（$t_i$是独立的未定元）

2. $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$**(Zariski切空间)**

3. $\mathfrak{m}$由d个元素生成。

满足这样条件的环称为正则局部环。

证：

$1 \implies 2$.显然；$2 \implies 3$. 由11.15的证明；

$3 \implies 1$.设$\mathfrak{m} = (x_1, \cdots, x_d)$，那么考虑11.20中的满同态：$\alpha : (A/\mathfrak{m})[t_1, \cdots, t_d] \to G_{\mathfrak{m}}(A)$，若某个齐次多项式$f$落入了$\ker \alpha$，那么自然$f(x_1, \cdots, x_d) = 0 \in \mathfrak{q}^{s+1}$，于是$f$的系数均在$\mathfrak{m}$中，从而$\bar{f} = 0$，于是$\ker \alpha = 0$，即有了同构。

例. 由9.2，DVR是正则局部环。

11.23a（正则局部环是整环）设A是任意环，$\mathfrak{a}$满足$\cap\mathfrak{a}^n=0$，若$G_{\mathfrak{a}}(A)$是整环，那么A也是。

证：设A中元素$x,y\neq 0$，存在r,s，$x\in\mathfrak{a}^r-\mathfrak{a}^{r+1},y\in\mathfrak{a}^s-\mathfrak{a}^{s+1}$。设$\bar{x},\bar{y}$是它们 分别在$G_r(A),G_s(A)$的像，$\bar{x},\bar{y}\neq 0$，由$G_{\mathfrak{a}}(A)$的整性，$\bar{x}\bar{y}\neq 0$，于是$xy\neq 0$。

对于正则局部环，注意到其分次环是域上多项式环，自然整。考虑Krull定理10.17，$\cap\mathfrak{m}^n$是所有能够被$1+\mathfrak{m}$中的某个元素零化的元素。然而$1+m,m\in\mathfrak{m}$当然不在$\mathfrak{m}$中，于是是单位，因此不是零因子。从而$\cap\mathfrak{m}^n=0$，运用11.23a即证。

11.23b（正则局部环都是整闭的）对于**Noetherian**环A，$\mathfrak{a}\subseteq J(A)$如果$G_{\mathfrak{a}}(A)$整闭，那么$A$整闭。

证：

首先11.23a保证了这A是整环：注意由10.19$\cap\mathfrak{a}^n=0$。

引理. 对于Noetherian整环A，K为分式域。$x\in K$在A上整
$\iff\exists a\in A,ax^n\in A\forall n>0$。

证：设$S=A[x]$，是K的$A-$子模。如果x整，那么S有限生成。设$x=p/q$，取$a=q^{\deg Irr(x)+1}$即可。因为S的一组生成元$1,x,\cdots$在a的乘法作用下都落入了A中。

反过来，如果条件成立，那么$aS\subseteq R$，设$aS=\mathfrak{a}$，而后者是有限生成的，于是S也是（生成元除以a即可），从而说明了x的整性。

设$x=a/b$在A上整，我们需要说明$a=bc$对某些$c\in A$成立，即$a\in(b)$。

考虑$S=R/(b)$，那么在$\mathfrak{a}$−拓扑中当然有$\cap\mathfrak{a}^nS=0$（仍然使用10.19）。而$\mathfrak{a}^nS=(\mathfrak{a}^n+(b)/(b)$，即$\cap((b)+\mathfrak{a}^n)=(b)$。

因此只需说明对于任何的n，$a\in(b)+\mathfrak{a}^n$。我们对n归纳：$n=0$的情况是平凡的，假设对于n命题成立：$a=cb+d,c\in A,d\in\mathfrak{a}^n$，那么$y=x-c=d/b$（作为两个整元的差）也在$A$上整。

那么由引理，$\exists u\in A,uy^n\in A\quad\forall n>0$。

记$v_n=uy^n.ud^n=v_nb^n$，那么在分次环$G_\mathfrak{a}(A)$中，$u^*(d^*)^n=v_n^*(b^*)^n$（注意有一个自然的$A\to G_\mathfrak{a}(A)$的同态。）

于是$u^*(d^*/b^*)^n\in G_\mathfrak{a}(A),\forall n>0$，从而$d^*/b^*$在$G_\mathfrak{a}(A)$上整（注意分次环保持了Noetherian性：10.22）

然而整闭性意味着$d^*=Eb^*,\exists E\in G_\mathfrak{a}(A)$：简单的次数观察就能发现$E$一定形如$e^*$，于是$d-eb\in\mathfrak{a}^{n+1}$，从而$a=(c+e)b+(d-eb)$，即说明了$a\in(b)+\mathfrak{a}^{n+1}$，于是得证。

11.24 A**是Noetherian局部环，则**A**正则** $\iff$ $\hat{A}$**正则。**

证：由10.16,10.26,11.19：$\hat{A}$是与A维数相同的Noetherian局部环，那么利用10.22 $G_\mathfrak{m}(A)\cong G_{\hat{\mathfrak{m}}}(\hat{A})$，$A/\mathfrak{m}\cong\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$得证。

Remark. 由11.24，正则局部环的完备化还是整环，其几何意义是：非奇异性 $\Longrightarrow$ 解析上的不可约性。

11.4 超越维数

接下来我们将看到前述的维数理论和代数簇的维数之间产生的联系。

假定k代数闭，V是不可约仿射代数簇，坐标环$A(V)$具有形式$k[x_1,\cdots,x_n]/\mathfrak{p}$。$A(V)$的分式域称为$V$上的有理函数域，记为$k(V)$。它是$k$的有限扩张，于是存在有限超越维数（最大代数无关元的个数）

我们定义这个维数是V的维数。

由Hilbert Nullstellenstaz(Weak Form)，V上的点和$A(V)$的极大理想有着一一对应。对于点P，设对应的极大理想为$\mathfrak{m}$，称$\dim A(V)_{\mathfrak{m}}$为V在P的局部维数。

11.25（主定理）**对于这样的不可约簇V，局部维数和超越维数处处相等。**

由11.21：$\dim V\geq\dim A_{\mathfrak{m}}$。接下来只需证明反方向的不等式。

引理11.26 设两个整环$B\subseteq A$，B整闭，且A在B上整。设$\mathfrak{m}$是A的极大理想，$\mathfrak{n}=\mathfrak{m}\cap B$，那么$\mathfrak{n}$也是极大的，并且$\dim A_{\mathfrak{m}}=\dim B_{\mathfrak{n}}$。

引理证明：由5.8极大性显然。由5.9知A中严格降素理想链限制回B仍然是严格降的，于是$\dim B_{\mathfrak{n}}\geq\dim A_{\mathfrak{m}}$。反过来任何一个$B$中的严格降素理想链（由5.16）可以提升到$A$，（并且显然仍然严格）。于是这就证明了$\dim A_{\mathfrak{m}}\geq\dim B_{\mathfrak{n}}$。

从而证明了引理。

回到11.25，由Noether正规化引理：存在一个多项式环$B=A[x_1,\cdots,x_d]\subseteq A(V)$，$B$在$A(V)$上整，且$d=\dim V$，$x_1,\cdots,x_d$代数无关。

由于UFD都是整闭的，于是B整闭。那么应用11.26，只需将问题转变为对环B证明。这相当于假定V是仿射空间，但这是显然的。

这样我们就证明了这个主定理。

（Note：正规化引理将扩张拆分成了超越和整的部分，引理证明了整部分不影响维数）

11.5(E)

1. $f\in k[x_1,\cdots,x_n]$**是代数闭域上的不可约多项式，那么P在簇$f(x)=0$上非奇异$\iff$偏导$\partial f/\partial x_i$在这一点不全为0。设$A=k[x_1,\cdots,x_n]/(f)$，$\mathfrak{m}$为P对应的极大理想。证明P不可约$\iff$ $A_{\mathfrak{m}}$是正则局部环。**

证：

由11.18，$\dim A_{\mathfrak{m}} = \dim(k[x_1, \cdots, x_m])_{\mathfrak{m}}/(f)(k[x_1, \cdots, x_m])_{\mathfrak{m}} = n-1$。

记$\mathfrak{m}_P = (x_1 - p_1, \cdots, x_n - p_n)$，$\mathfrak{m}$是$\mathfrak{m}_p$在$A$的像。

当然有$f = \sum (x_i - p_i) g_i, g_i \in k[x_1, \cdots, x_n]$，于是：

$\partial f / \partial x_i = g_i + (x_i - p_i) \partial g_i / \partial x_i + \sum_{j \neq i} (x_j - p_j) \partial g_j / \partial x_j$，于是$f$是奇异的 $\iff g_i \in \mathfrak{m}_P \iff f \in \mathfrak{m}_P^2$

但是$\mathfrak{m} \cong \mathfrak{m}_P/(f), \mathfrak{m}^2 = (\mathfrak{m}_P^2 + (f))/(f)$，于是$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{m}_P/(\mathfrak{m}_P^2 + (f))$。

于是f奇异 $\iff$
$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \iff \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_k \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \iff \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \neq n-1 \iff$ 不正则。

反过来，f不是奇异的，那么$\dim_k \mathfrak{m}_P/(\mathfrak{m}_P^2 + (f)) < \dim \mathfrak{m}_P / \dim_k \mathfrak{m}_P^2 = n$，即$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq n-1$。

然而由11.5，$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \# generators\ of\ \mathfrak{m} \geq \dim A_{\mathfrak{m}} = n-1$，于是$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n-1$，从而正则。

2. 在11.21中如果A是完备的，那么$k[[t_1, \cdots, t_d]] \to A : t_i \mapsto x_i$是单射，并且$A$是有限生成$k[[t_1, \cdots, t_d]]$模。

证：

这个同态是$k[t_1, \cdots, t_d]/(t_1, \cdots, t_d)^n \to A/(x_1, \cdots, x_d)^n$在完备化诱导出来的。由于对每个$n$这个映射都是单的，那么由正合性知诱导出的态射也是单的。

另外$(x_1, \cdots, x_d)$是$\mathfrak{m}-$准素理想，ANoetherian，那么$\mathfrak{m}^n \subseteq (x_1, \cdots, x_d) \subseteq \mathfrak{m}$，于是$(x_1, \cdots, x_d)-$完备化和$\mathfrak{m}-$完备化相同，从而题目中给出的完态射是单的。

现在A中$(x_1, \cdots, x_d)^n$是$(t_1, \cdots, t_d)-$滤过，这和$\mathfrak{m} - adic$等价，于是是Hausdorff的：$\cap (x_1, \cdots, x_d)^n = 0$。

而$G_{(x_1,\cdots,x_d)}(A)$是有限生成$G_{(t_1,\cdots,t_d)}(k[[t_1,\cdots,t_d]])$有限生成：被1生成。（注意他们的0次部分同构，高次有着自然的对应：$t_i \leftrightarrow x_i$）

于是由10.24命题得证。

3. 将**11.25**推广到非代数闭域上。

证：注意$\bar{k}[x_1,\cdots,x_d]$在$k[x_1,\cdots,x_d]$上整，运用2次引理11.26：就有
$\dim A(V)_{\mathfrak{m}} = \dim B_n = \dim \bar{k}[x_1,\cdots,x_d]_{\mathfrak{q}}$。但是11.25已经保证了最后一式正是$d$。

4. 存在无限维的**Noetherian**整环。

设域k，$A = k[x_1,\cdots,x_n,\cdots]$，设$m_i$是一列数列满足$m_{i+1} - m_i > m_i - m_{i-1}$。令
$\mathfrak{p}_i = (x_{m_i+1},\cdots,x_{m_{i+1}})$，$S = A - \cup\mathfrak{p}_i$。

每个$\mathfrak{p}_i$都是素的（商去后是整环），于是S是乘法封闭子集。

$S^{-1}A$中的极大理想为$S^{-1}\mathfrak{p}_i$，因为任何理想$\mathfrak{a} \subseteq \cup\mathfrak{p}_i \implies \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$。而
$S^{-1}A_{S^{-1}\mathfrak{p}_i} = S^{-1}(A_{\mathfrak{p}_i})$，于是是Noetherian的。

另一方面每个元素当然仅被有限个（实际上是1个）极大理想包含，于是7.E9的条件都满足了，从而$S^{-1}A$是Noetherian的。

每个$S^{-1}\mathfrak{p}_i$的高至少为$\mathfrak{m}_{i+1} - \mathfrak{m}_i$，从而$\dim S^{-1}A = +\infty$

5. 将**11.1**以**Grothendieck**群$K(A_0)$的形式叙述。

6. 对于任何一个环A，$1 + \dim A \leq \dim A[x] \leq 1 + 2\dim A$。

证：

设$f: A \to A[x]$是嵌入，考虑A的素理想$\mathfrak{p}$的纤维：$k \otimes_A A[x] \cong k[x]$，于是$\dim k[x] = 1$，于是$A[x]$的素理想链至多两项对应同一个$A$中的素理想。从而结论自然成立。

7. 对于Noetherian环A，$\dim A[x] = 1 + \dim A$，于是$\dim A[x_1, \cdots, x_n] = n + \dim A$

证：设$\mathfrak{p}$在A中高度为m。那么存在$a_1, \cdots, a_m$，使得$\mathfrak{a} = (a_1, \cdots, a_m)$，并且$\mathfrak{p}$是从属于它的极小素理想：对$A_\mathfrak{p}$应用维数定理：存在$\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}-$准素理想有$m$个生成元，拉回即可。

由4.E7，$\mathfrak{p}[x]$是$\mathfrak{a}[x]$的极小素理想，于是$\mathfrak{p}[x]$的高不超过m。（由11.16）

另一方面：$\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}$诱导了$\mathfrak{p}_0[x] \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m[x] = \mathfrak{p}[x]$，于是$\mathfrak{p}[x]$的高不低于$m$。

从而$\mathfrak{p}[x]$的高和$\mathfrak{p}$相同。

下面归纳地说明$height(\mathfrak{q}) \leq height(\mathfrak{q}^c) + 1$，当高度为0时，这个结果和11.6的证明是相同的。

如果$height(\mathfrak{q}^c) < m$时都成立，当$height(\mathfrak{q}^c) = m$时，为了说明$height(\mathfrak{q}) \leq m + 1$，我们需说明对于任何$\mathfrak{r} \subset \mathfrak{q}$，都有$height(\mathfrak{r}) \leq m$。如果$\mathfrak{r}^c \subset \mathfrak{q}^c$，那么对$\mathfrak{r}^c$应用归纳假设。

如果$\mathfrak{r}^c = \mathfrak{q}^c$，那么$\mathfrak{q}^c[x] \subseteq \mathfrak{r} \subset \mathfrak{q}$。由于11.6中指出了最多只能有两个$A[x]$中的素理想拉回到$A$中相同，从而$\mathfrak{r} = \mathfrak{q}^c[x]$，于是其高为$m$，得证。