Chapter 7 函数项级数

本章节主要研究的内容为极限的换序和$C(X)$中的一些性质。

1. 换序定理

极限过程的可交换性涉及到许多情况，为了统一地处理它们，采用基上极限的语言叙述。

1.1 集合的基

给定集合X，若其子集族$\mathscr{B}$满足：

a. $\phi \notin \mathscr{B}$ b. $\forall b_1, b_2 \in \mathscr{B}, \exists b_3 \in \mathscr{B}$且$b_3 \subseteq b_1 \cap b_2$

则称为X的一个基。

例：

a. 给定$t \in X \subseteq \mathbb{R}$：$\mathscr{B} = \{(t-\delta_1, t+\delta_2) \cap X | \delta_1, \delta_2 > 0\}$

b. $X \subseteq \mathbb{R}$且无上界：$\mathscr{B} = \{(a, +\infty) \cap X | a \in \mathbb{R}\}$（这可以看做a.中$t \to +\infty$的情况）

c. X为$[a,b]$上全体带有标记点的分划，对每个$\delta > 0$：
$\mathscr{B}_\delta = \{P \in X | maxlength(P) < \delta\}$，取$\mathscr{B} = \bigcup B_\delta$（很明显能看出它和Riemann积分的关系）

1.2 基上极限

对于实值函数$f: X \to \mathbb{R}$，$\mathscr{B}$是X的一个基。

若：$\exists a \in \mathbb{R}, s.t. \forall \varepsilon > 0, \exists b \in \mathscr{B}$，只要$x \in b$，就有$|f(x) - a| < \varepsilon$，则称$a$为$f$在基$\mathscr{B}$上的极限，记作：

$$\lim_{\mathscr{B}} f(x) = a \text{ 或 } f(x) \xrightarrow{\mathscr{B}} a$$

于是考虑1中的三个例子：

a. f在$\mathscr{B}$上的极限即为：$\lim_{x\to t}f(x)$

b. f在$\mathscr{B}$上的极限即为：$\lim_{x\to+\infty}f(x)$

c. 取函数$\sigma(P)=\sum f(c_k)\Delta_k$，那么$\sigma$在$\mathscr{B}$上的极限即为Riemann积分$\int_a^b f(x)dx$

1.3 换序定理

这是换序的核心定理，简单说就是一个n重极限过程可换序可由其中$n-1$个极限过程的一致性推出。

（换序定理）对于X,Y上的基$\mathscr{B}_X,\mathscr{B}_Y$，它们在$X\times Y$上诱导了一组基$\mathscr{B}_{X\times Y}=\{b_X\times b_Y|b_X\in\mathscr{B}_x,b_Y\in\mathscr{B}_Y\}$

对于$f:X\times Y\longrightarrow\mathbb{R}$，若$f(x,y)\overset{\mathscr{B}_X}{\rightrightarrows}F_1(y)$

（即：$\forall\varepsilon>0,\exists b_X\in\mathscr{B}_X$，只要$x\in b_X$，就有$|f(x,y)-F_1(y)|<\varepsilon$对任意$y\in Y$成立）

且：$f(x,y)\xrightarrow{\mathscr{B}_Y}F_2(x)$，那么：

$\lim_{\mathscr{B}_X}\lim_{\mathscr{B}_Y}f(x,y)=\lim_{\mathscr{B}_Y}\lim_{\mathscr{B}_X}f(x,y)=\lim_{\mathscr{B}_{X\times Y}}f(x,y)$

证：

a. $\lim_{\mathscr{B}_x}F_2(x)$存在

由于$f(x,y)\overset{\mathscr{B}_X}{\rightrightarrows}F_1(y)$：$\forall\varepsilon>0,\exists b_X\in\mathscr{B}_X,\forall x_1,x_2\in b_X,\forall y\in Y$:

$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|<\frac{\varepsilon}{3}$

由于$f(x,y)\xrightarrow{\mathscr{B}_Y}F_2(x)$：$\exists b_{Y_1},b_{Y_2}\in\mathscr{B}_Y,\forall y\in b_Y\subseteq b_{Y_1}\cap b_{Y_2}$:

$|f(x_i,y)-F_2(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}\ (i=1,2)$

于是综合两者，$|F_2(x_1)-F_2(x_2)|<\varepsilon$，$\forall x_1,x_2\in b_X$，从而由Cauchy准则得证，设这个极限为$A$。

b. $\lim_{\mathscr{B}_Y}F_1(y)=A$

$\exists b_X\in\mathscr{B}_X,\forall x\in b_X,y\in Y:|f(x,y)-F_1(y)|<\varepsilon/3\quad(f\rightrightarrows F_1)$

$\exists b'_X \in \mathscr{B}_X, \forall x \in b'_X : |F_2(x) - A| < \varepsilon/3 \quad (F_2 \to A)$

$\exists \mathscr{B}_X \ni b''_X \subseteq b_X \cap b_{X'}$，以及某个$x_0 \in b''_X$，再取$b_Y \in \mathscr{B}_Y$，使得$|F_2(x_0) - f(x_0, y)| < \varepsilon/3$ （$f \to F_2$）

综合三者，$\forall y \in b_Y$： $|F_1(y) - A| < \varepsilon$，从而得证。

c. $\lim_{\mathscr{B}_{X\times Y}} f(x,y) = A$

这是简单的，各自选取X, Y的基中的元素，使得$|f(x,y) - F_1(y)| < \varepsilon/2\ (\forall y)$ 且$|F_1(y) - A| < \varepsilon/2$即可。

2. 一致收敛

正如前文所述，由换序定理知一个n重极限过程可换序可由其中$n-1$个极限过程的一致性推出（简单归纳），接下来研究函数列的一致收敛性。

Weierstrass M判别

若$|f_n(x)| \leq M_n$，且$\sum M_n$收敛，则$\sum f_n$的部分和构成的函数列一致收敛。

（考虑Cauchy判别即可）

A-D判别

Abel: a. $\sum u_n(x)$一致收敛 **b.** 对于每个x，$v_n(x)$单调，且一致有界

Dirichlet: a. $\sum u_n(x)$的部分和一致有界 **b.** 对于每个x，$v_n(x)$关于n单调，且$v_n(x) \rightrightarrows 0$

则$\sum u_n(x)v_n(x)$一致收敛

证明同数列的A-D判别法

前文的换序定理给出了一个直接推论：

连续函数列$f_n \rightrightarrows f$，则f也连续。

自然想问逆命题何时成立，紧集上是一个情形。

（**Dini**引理）K是紧拓扑空间，$\{f_n\}$是K上的连续实值函数序列，并且逐点收敛到连续函数f，并且满足f_n关于n逐点单调减，则这个收敛是一致的。

证：记$g_n = f_n - f$，$g_n(x)$连续，g_n关于n逐点单调减，且g_n逐点收敛到0，需证其一致收敛到0

记$K_n = \{x \in K | g_n(x) \geq \varepsilon\}$，那么$O_n$闭，从而紧，而$g_n$逐点收敛到0，于是对每个$x$能找到充分大的$N$使$n \geq N$则$x \notin K_n$，另一方面有降链$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$，因而$\bigcap K_n$是空的。

但是紧空间中满足有限交性质的闭集族的交不空，于是族$\{K_1, \cdots\}$不满足有限交性质，从而存在$K_N = \phi$，于是$\forall n > N, g_n(x) < \varepsilon$，即证。

3. 换序定理应用

3.1 积分-极限

这个问题在实分析中将会被更加细致地研究，被称之为积分号下取极限，这里只利用换序定理给出一个很弱的结论。

$f(x,y) : [a,b] \times Y \to \mathbb{R}$，且对每个$y$，$f(x,y)$关于$x$在$[a,b]$上**Riemann**可积，对于$Y$的基$\mathscr{B}_Y$，$f(x,y) \overset{\mathscr{B}_Y}{\rightrightarrows} F(x)$

则：$F(x)$在$[a,b]$上**Riemann**可积，且$\int_a^b F(X)dx = \lim_{\mathscr{B}_Y} \int_a^b f(x,y)dx$

证：在换序定理中，令X和$\mathscr{B}_X$如同1.1.c中那样定义，取换序定理中的函数为$\sigma(P, f(x,y))$为Riemann和，于是只需验证$\sigma(P, f(x,y)) \overset{\mathscr{B}_Y}{\rightrightarrows} \sigma(P, F(x))$

由于：$f(x,y) \overset{\mathscr{B}_Y}{\rightrightarrows} F(x)$

$\exists b_Y \in \mathscr{B}_Y, \forall y \in b_Y, \forall x \in [a,b], |f(x,y) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

从而：$|\sigma(P, f(x,y)) - \sigma(P, F(x))| \leq \sum |F(c_i) - f(c_i, y)| \Delta_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$，于是得证。

另外可以看出这个证明可以推广到Riemann-Stieltjes积分。

来看一个稍微强一些的定理：

较弱的Lebesgue控制收敛定理

g与$\{f_n\}$定义在$(0,+\infty)$上，并且它们在每个内闭区间上**Riemann**可积，且$|f_n|\le g$，$\int_0^{+\infty}g(x)dx<+\infty$

且$\{f_n\}$在每个$(0,+\infty)$的紧子集上一致收敛到f，那么：

$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)dx=\int_0^{+\infty}f(x)dx$

证：这事实上是反常积分-极限换序，为了方便叙述，我们不妨将$(0,+\infty)$拆成两个半开半闭区间，先用基的语言对一个半开半闭区间（不妨$[1,+\infty)$）叙述结论，然后再将两段结果综合即证。

对于$f(x,y):[1,+\infty)\times Y\to\mathbb{R}$

对任何y，$f(x,y)$关于x在任何$[1,+\infty)$内闭区间上Riemann可积，且控制函数保证了反常积分$\int_1^{+\infty}f(x,y)dx$收敛。

现取$Y=\mathbb{Z}_{>0}$，基$\mathscr{B}_Y$如同1.1.b那样选取，这样就将原定理转换为基的语言。

记：$I(y,u)=\int_1^u f(x,y)dx$，其中$u\in S\overset{\triangle}{=}[1,+\infty)$，$S$中基$\mathscr{B}_S$如同1.1.b那样选取。

则：控制函数保证了$I(y,u)$在基$\mathscr{B}_S$上一致地收敛到$I(y,+\infty)$

从而由换序定理，只需验证$I(y,u)\overset{\mathscr{B}_y}{\to}\int_1^b f(x)dx$，但这是常义积分-极限换序的结果，于是定理得证。

3.2 求导-极限

$f(x,y):[a,b]\times Y\to\mathbb{R}$，且对每个$y$，$f(x,y)$在$[a,b]$连续，在$(a,b)$可导，且$\exists x_0\in[a,b]$使得$\lim_{\mathscr{B}_Y}f(x_0,y)$存在。

且$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\overset{\mathscr{B}_Y}{\rightrightarrows}\varphi(x)$

则：存在$F(x):[a,b]\to\mathbb{R}$满足$f(x,y)\overset{\mathscr{B}_Y}{\rightrightarrows}F(x)$，且$F'(x)=\varphi(x)$

证：思路是在换序定理中取函数$d(h,y)=\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$，为证一致收敛性，需先证明$f(x,y)$一致收敛。

由于在点x_0，$\lim_{\mathscr{B}_Y} f(x_0,y)$存在，故
$\exists b_Y\in\mathscr{B}_Y,\forall y_1,y_2\in b_y,\ |f(x_0,y_1)-f(x_0,y_2)|<\varepsilon/2$

而$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\overset{\mathscr{B}_Y}{\rightrightarrows}\varphi(x)$，于是
$\exists b_Y'\in\mathscr{B}_Y,\forall y_1,y_2\in b_Y',\forall x,\quad |\frac{\partial}{\partial x}f(x,y_1)-\frac{\partial}{\partial x}f(x,y_2)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

那么对于$y_1,y_2\in b_{Y0}\subseteq b_Y\cap b_Y'$

$$
\begin{aligned}
|f(x,y_1)-f(x,y_2)| &\le |[f(x,y_1)-f(x.y_2)]-[f(x_0,y_1)-f(x_0,y_2)]|+|f(x_0,y_1)-f(x_0,\\
&=|\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y_1)-f(x,y_2)|_{x=c\in[x.x_0]}|\cdot|x-x_0|+|f(x_0,y_1)-f(x_0,y_2)|\\
&<\varepsilon
\end{aligned}
$$

于是可设$f(x,y)\overset{\mathscr{B}_Y}{\rightrightarrows}F(x)$

接下来运用换序定理，取函数$d(h,y)=\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$，$d:H\times Y\to\mathbb{R}$，其中$H=\{h\in\mathbb{R}|x+h\in(a,b)\}$，取其基为$\mathscr{B}_H=(-\delta,\delta)\cap H|\delta>0$

那么自然$d(h,y)\overset{\mathscr{B}_H}{\to}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$，只需$d(h,y)\overset{\mathscr{B}_Y}{\rightrightarrows}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$，但这由$f(x,y)\overset{\mathscr{B}_Y}{\rightrightarrows}F(x)$保证，从而得证。

3.3 重积分

$f(x,y):D=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 连续，则$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx=\int_c^d\int_a^b=f(x,y)dxdy$

证：同3.1一样定义Riemann和函数$\sigma_x(P,f(x,y)),\sigma_y(Q,f(x,y))$

然后在换序定理中取X,Y分别为$[a,b],[c,d]$的带标记点的分划构成的集合，基的取法如同1.1.c。取换序定理中的函数为：$\sigma_x(P,\sigma_y(Q,f(x,y)))$，于是由换序定理，只需验证：

$\sigma_x(P,\sigma_y(Q,f(x,y)))\overset{\mathscr{B}_Y}{\rightrightarrows}\sigma_x(P,\int_c^d f(x,y)dy)$

但$f(x.y)$一致连续，于是存在δ，只要$|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|<\delta$，就有
$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$

故可取$b_Y \in \mathscr{B}_Y$，使得$\forall Q \in b_Y, maxlength(Q) < \delta$

从而，$\forall Q \in b_Y, P \in b_X$

$$|\sigma_x(P, \sigma_y(Q, f(x,y))) - \sigma_x(P, \int_c^d f(x,y)dy)|$$

$$= |\sigma_x(P, \sigma_y(Q, f(x,y) - \int_c^d f(x.y)dy))| \le (b-a)(d-c)\varepsilon$$

于是得证。

4. $C(X)$中函数列的收敛子列: Arzela-Ascoli定理

仿照$\mathbb{R}$中情况，希望知道实值函数列的收敛子列乃至一致收敛子列的性质，而后者与$C(X)$中子集的紧性有关。

4.1 $C(X)$、上确范数

首先明确研究对象：对于度量空间X，记$C(X)$为全体X上连续实值函数构成的集合，若需要区分实值函数和复值函数时分别用$C^{\mathbb{R}}(X)$和$C^{\mathbb{C}}(X)$表示，否则默认为实值函数。

$C(X)$首先有着明显的线性结构，同时可以赋予很多种度量结构。本章中赋予的是上确范数从而形成度量空间，这里上确范数是指$||f|| = \sup_{x\in X}|f(x)|$，从而诱导了度量
$d(f,g) \overset{\triangle}{=} ||f-g||$

当X是紧度量空间时，上述定义良好，并且$(C(X), d)$构成完备空间。

$(C(X), d)$构成完备空间

证：设$\{f_n\}$是$C(X)$中Cauchy列，于是由一致收敛的Cauchy准则，$f_n \rightrightarrows f$，那么f连续，从而得证。

研究上确范数诱导的度量的原因是$C(X)$中序列f_n在度量d意义下收敛于$f \iff f_n$在X上一致收敛于f。

同时$C(X)$的闭子集称为一致闭的，$C(X)$的子集的闭包称为一致闭包。

4.2 Helly选择定理

首先从一个特例开始，这个特例的证明使用的对角线法将会被反复使用。

$\{f_n\}$在可数集E上逐点有界，则其有子列$\{f_{n_k}\}$在E上逐点收敛

证：设$\{x_i\}$为E的一个列举，由于$\{f_n(x_1)\}_{n=1}^{+\infty}$有界，于是有子列收敛，设为$\{f_{1,k}(x_1)\}_{k=1}^{+\infty}$

那么在函数列$S_1: f_{1,1}, f_{1,2}, \cdots$中考虑数列$f_{1,1}(x_2), f_{1,2}(x_2), f_{1,3}(x_3), \cdots$，也能找到一个子列收敛，设它们所对应的函数列为：$S_2: f_{2,1}, f_{2,2}\cdots$，这样归纳地构造。

那么S_n是S_{n-1}的子列，且$\{f_{n,k}(x_n)\}_{k=1}^{+\infty}$收敛，并且保持先后顺序。

于是$f_{1,1}, f_{2,2}, f_{3,3}\cdots$即为满足要求的函数列。

（Helly选择定理）$\{f_n\}$是$\mathbb{R}$上单调增函数的序列，且$\forall x, n:\ f_n(x) \in [0,1]$，则：$\{f_n\}$有一个逐点收敛的子列。

证：由前述结论，有子列$\{f_{n_i}\}$在有理数点收敛，设收敛值为$f(r)$，那么f是单调增的。对任意x，记$f(x) = \sup_{\mathbb{Q}\ni r\le x} f(x)$，从而这个$f$是良定义且单调增的。

于是若f在点x处连续，可选择$r \le x \le s,\ r, s \in \mathbb{Q}$，使$f(r) \in [f(x)-\varepsilon, f(x)], f(s) \in [f(x), f(x)+\varepsilon]$

另外，对于充分大的i，$|f_{n_i}(r) - f(r)| \le \varepsilon, |f_{n_i}(s) - f(s)| \le \varepsilon$，于是$f_{n_i}(r) \in [f(x)-2\varepsilon, f(x)+\varepsilon]$，对于$s$对称同理。

从而$|f_{n_i}(x) - f(x)| \le 2\varepsilon$，故$f_{n_i}$在点$x$逐点收敛至$f$

而单调有界函数的不连续点至多可数，故再次运用前述结论，在$\{f_{n_i}\}$继续选出子列在不连续点集上逐点收敛，从而在$\mathbb{R}$上逐点收敛，得证。

4.3 等度连续，Arzela-Ascoli定理

度量空间X上实值函数族$\mathscr{F}$在x点等度连续，若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\forall f\in\mathscr{F}$，只要$d(x,x')<\delta$，就有$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

若$\mathscr{F}$在X中每一点都等度连续，则称$\mathscr{F}$在X上等度连续。

与4.2类似地有：

（Arzela-Ascoli引理）X为可分度量空间，$\{f_n\}$为$C(X)$中逐点有界且等度连续的函数列，则$\{f_n\}$有一子列逐点收敛到X上的实值函数。

证：对于X的可数稠密子集D，由4.2中结论，存在子列$\{f_{n_i}\}$在D上逐点收敛到f，不妨记这个子列为$\{f_n\}$.

对于每个$x_0\in X$，存在δ使得$\forall x\ \ s.t.\,d(x_0,x)<\delta,|f_n(x_0)-f_n(x)|<\varepsilon/3$对所有指标$n$满足。而$D$稠密，于是$\exists d\in D,d(x_0,d)<\delta$。同时选择充分大的$n,m$使$|f_n(d)-f_m(d)|<\varepsilon/3$

于是$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\varepsilon$，故逐点收敛，得证。

紧度量空间X上$\{f_n\}\subseteq C(X)$若逐点收敛，则：$\{f_n\}$一致收敛$\iff\{f_n\}$在X上等度连续

证：（$\implies$）存在N使得$n>N$则$||f_n-f_N||<\varepsilon$，而紧集上连续函数一致连续，于是存在δ，只要$d(x,y)<\delta$且$i=1,\cdots,N$，就有$|f_i(x)-f_i(y)|<\varepsilon$.

若$n>N:$
$|f_n(x)-f_n(y)|\le|f_n(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f_n(y)|<3\varepsilon$

于是综合两者就得到等度连续。

（$\impliedby$）紧集上等度连续则一致等度连续，于是$\exists\delta>0\ s.t.\ \forall n\,\forall d(u,v)<\delta,$有$|f_n(u)-f_n(v)|<\varepsilon$

紧度量空间是全有界的，从而能被有限δ-网覆盖，设为$B(x_i,\delta)$

则对于每个i，$\{f_n(x_i)\}$是Cauchy的，于是充分大的n,m，有$|f_n(x_i)-f_m(x_i)|<\varepsilon$。

那么对每个x，
$|f_n(x)-f_m(x)|\le|f_n(x)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f_m(x_i)|+|f_m(x_i)-f_m(x)|<3\varepsilon$

于是它一致收敛。

紧度量空间X上$\{f_n\}\subseteq C(X)$逐点有界且等度连续$\implies\{f_n\}$一致有界

证：紧集上等度连续则一致等度连续，于是$\exists\delta>0\ s.t.\ \forall n\,\forall d(u,v)<\delta,$有
$|f_n(u)-f_n(v)|<\varepsilon$

紧度量空间是全有界的，从而能被有限δ-网覆盖，设为$B(x_i,\delta)$，不妨$|d(x,x_i)|<\delta$，于是取$|f_n(x)|\le M+\varepsilon$

综合4.2的第一个命题（对角线）；A-A引理；紧度量空间上逐点收敛时一致收敛和等度连续的等价性；以及有界性的等价命题 可以得到：

（Arzela-Ascoli定理）X**是紧度量空间，**$\{f_n\}$**是**X**上一致有界，等度连续的实值函数，于是**$\{f_n\}$**有子列一致收敛到某个**X**上连续函数，条件改为逐点有界且等度连续仍然成立。**

同时这个定理的逆定理能帮助判断$C(X)$中子集的紧性。

X**是紧度量空间，**$\mathscr{F}\subseteq C(X)$**，则：**$\mathscr{F}$**紧**$\iff\mathscr{F}$**闭，一致有界且等度连续**

证：（$\Longleftarrow$）设$\{f_n\}$是$\mathscr{F}$中序列，则由Arzela-Ascoli定理，存在子列收敛到$C(X)$，而$\mathscr{F}$闭，从而这个子列也收敛到$\mathscr{F}$。于是$\mathscr{F}$序列紧，从而紧。

（$\implies$）设$\mathscr{F}$紧，则$\mathscr{F}$完备，从而闭。$\mathscr{F}$全有界，从而一致有界。

若$\mathscr{F}$在点$x\in X$处不等度连续，则$\exists\varepsilon>0\ s.t.\ \forall n,\exists f_n\in\mathscr{F},\ x_n\in X$，使得
$d(x_n,x)<\frac{1}{n}$但$|f_n(x_n)-f_n(x)|\ge\varepsilon$

但是$\mathscr{F}$紧从而序列紧，于是上述定义的$\{f_n\}$存在子列$\{f_{n_k}\}$一致收敛到$f\in C(X)$

于是对于充分大$k\ge K$，$||f-f_{n_k}||<\varepsilon/3$

即：$|f(x)-f_{n_k}(x)|<\varepsilon/3$

$|f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k})| < \varepsilon/3$

但是$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(x)| \geq \varepsilon$且$d(x_{n_k}, x) < 1/n_k$

从而$|f(x) - f(x_{n_k})| > \varepsilon/3$但$d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n_k}$，与$f$连续性矛盾，得证。

5. Weierstrass逼近、Stone-Weierstrass定理

5.1 Dirac函数列：Weierstrass逼近、Fejer定理

Dirac函数列（也称Delta函数列）指一族非负实值连续函数φ_n，满足：

a. 对于每个n，$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_n(x)dx = 1$

b. 对于每个$\delta > 0, \lim_{n\to+\infty} \int_{|x|>\delta} \varphi_n(x)dx = 0$

（Dirac列卷积逼近）若f是$\mathbb{R}^m$上连续有界的函数，则$\varphi_n * f$在$\mathbb{R}^m$的每个紧子集上一致收敛到f

证：设紧集$\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$，对于$x \in \Omega$：

$$
\begin{aligned}
&|f(x) - (f * \varphi_n)(x)| \\
&= |\int_{\mathbb{R}^m} [f(x) - f(x-t)]\varphi_n(t)dt| \\
&\leq |\int_{|t|\leq\delta} [f(x) - f(x-t)]\varphi_n(t)dt| + |\int_{|t|\geq\delta} [f(x) - f(x-t)]\varphi_n(t)dt|
\end{aligned}
$$

对于第一项，由于f连续，且Ω紧从而有界，于是可以取充分小δ使得对每个$x \in \Omega$，$|f(x) - f(x-t)| < \varepsilon/2$，于是第一项$\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{|t|\leq\delta} \varphi_n(t)dx \leq \varepsilon/2$

对于第二项，$|f(x) - f(x-t)|$一致有界，于是可取充分大n，从而使第二项小于$\varepsilon/2$

于是完成了证明。

那么Weierstrass逼近定理就几乎完成了。

（Weierstrass逼近定理，$\mathbb{R}^1$版本）定义在$\mathbb{R}^1$中紧集上的连续函数可以被多项式一致逼近

证：不妨$\Omega \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$，取Dirac函数列为：

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{I_n}(1-x^2)^n & |x| \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (Landau)$$

其中归一化系数$I_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$，可以验证它的确是一个Dirac函数列。

将f连续延拓到整个$\mathbb{R}$上，由Tietze延拓，可以使f有界（当然$\mathbb{R}^1$的情况下完全不用考虑Tietze延拓）

那么$f * \varphi_n$在紧集$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$上一致收敛到$f$上，而且$f * \varphi_n$事实上是常义积分（充分大后则为0），于是可知每个$f * \varphi_n$都是多项式，从而得证。

（Weierstrass逼近定理，$\mathbb{R}^m$版本）定义在 $\mathbb{R}^m$中紧集上的连续函数可以被多项式一致逼近

证：同样，不妨$\Omega \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^m$，取Dirac函数列为

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{I_n}\prod_{i=1}^{m}(1-x_i^2)^n & |x| \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (Landau)$$

接下来证明同前，值得注意的是这里Tietze延拓发挥了作用。

同样，Fourier分析中重要的定理：Fejer定理也可以被如此证明。

这里的Dirac函数列被定义为：一族非负实值连续周期函数φ_n，满足：

a. 对于每个n，$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(x)dx = 1$

b. 对于每个$\delta > 0, \lim_{n\to+\infty}\int_{\delta\le|t|\le\pi}\varphi_n(x)dx = 0$

c. 周期$T = 2\pi$

那么有类似的卷积逼近定理：

（Dirac列卷积逼近，三角版本）若f是$\mathbb{R}$上连续复值函数，且有周期2π，则$\varphi_n * f$在$\mathbb{R}$上一致收敛到f

（这里的卷积指：$f*g(x)\overset{\triangle}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g(t)dt$）

证：设紧集$\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$，对于$x\in\Omega$:

$$|f(x)-(f*\varphi_n)(x)|$$
$$=\frac{1}{2\pi}|\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f(x-t)]\varphi_n(t)dt|$$
$$\leq\frac{1}{2\pi}|\int_{|t|\leq\delta}[f(x)-f(x-t)]\varphi_n(t)dt|+|\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}[f(x)-f(x-t)]\varphi_n(t)dt|$$

对于第一项，由于f连续，从而在$[-\pi,\pi]$上一致连续，又有周期性，于是可以取充分小δ使得对每个$x\in\Omega$，$|f(x)-f(x-t)|<\varepsilon/2$，于是第一项$\leq\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\int_{|t|\leq\delta}\varphi_n(t)dx\leq\varepsilon/2$

对于第二项，$|f(x)-f(x-t)|$一致有界，于是可取充分大n，从而使第二项小于$\varepsilon/2$

于是完成了证明。

对于$\mathbb{R}$上连续复值函数f，且有周期2π，记：

$$D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}(x\in2\pi\mathbb{Z}\text{时延拓为}2n+1)$$

$$K_m(x)=\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}D_n(x)$$
$$=\frac{1}{m\sin\frac{x}{2}}\sum_{n=0}^{m-1}\sin\frac{2n+1}{2}x=\frac{1-\cos mx}{2m\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\cos mx}{m(1-\cos x)}(x\in2\pi\mathbb{Z}\text{时延拓为}m)$$

$S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}$，其中$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt$

可以验证$K_m(x)$是一组Dirac函数列，于是K_m*f在$\mathbb{R}$上一致收敛到f.

而$(D_n*f)(x)=\sum_{k=-n}^{k=n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{ik(x-t)}dt=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}=S_n(x)$，同理

$(K_n*f)(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S_n(x)$

那么就得到了：（**Fejer**定理）$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S_n(x)\rightrightarrows f(x)$

同时作为推论：$\mathbb{R}$上连续复值函数f，且有周期2π，能被三角多项式一致逼近。

5.2 Stone-Weierstrass定理

现在回来继续研究$C(X)$中的逼近，5.1的定理告诉我们多项式集合是一个可行的逼近集合，自然想考虑它的推广，这正是Stone推广的Weierstrass定理的内容。

考虑最一般的情况：X是紧Hausdorff空间，$C(X)$意义同前。

（引理1）X至少两个元素，$H \subseteq C(X)$，且：

$a. \forall u, v \in H,\ \max\{u, v\},\ \min\{u, v\} \in H$

$b. \forall x_1 \neq x_2 \in X,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ \ \exists u \in H:\ s.t. u(x_1) = c_1,\ u(x_2) = c_2$

则：H在$C(X)$中稠密

证：设$f \in C(X)$，固定某个$x \in X$，则对每个$y \neq x$，
$\exists u_y \in H,\ u_y(x) = f(x),\ u_y(y) = f(y)$

记$O_y = \{x' | f(x') - u_y(x') < \varepsilon\}$，那么这是一个包含$x, y$的开集，从而$X = \bigcup_{y \neq x} O_y$

于是存在有限开覆盖，设为$O_{y_1}, \cdots O_{y_r}$

令$v_x = \max\{u_{y_1}, \cdots u_{y_r}\} \in H$，那么$v_x(x) = f(x)$且$\forall x' \in X,\ f(x) - f(x') < \varepsilon$

现在让x变动，同样地，记$P_x = \{x' | f(x') - v_x(x') > -\varepsilon\}$

同理，存在有限开覆盖，设为$P_{x_1}, \cdots P_{x_s}$

令$v = \min\{v_{y_1}, \cdots v_{y_s}\} \in H$，那么$||f - v|| < \varepsilon$，得证。

下面阐述几个定义：

a. $H \subseteq C(X)$，若$\forall x_1 \neq x_2 \in X, \exists h \in H, h(x_1) \neq h(x_2)$，则称$H$是分离的。

b. 若$\forall f,g\in H,\max\{f,g\},\min\{f,g\}\in H$，则称$H$是一个格。

（$C(X)$的线性子空间是一个格 $\iff$ 若$h\in H$则$|h|\in H$）

c. $C(X)$的线性子空间称为一个子代数，若它在乘法下封闭。

（引理2）若H是$C(X)$一个分离的线性子空间，并且包含常值函数，且是一个格，则H在$C(X)$中稠密。

证：$|X|=1$时平凡，否则应用引理1，只需验证b条件。

由于H分离，$$\exists h, h(x_1)\neq h(x_2)

则$\begin{cases}\lambda h(x_1)+\mu=c_1\\ \lambda h(x_2)+\mu=c_2\end{cases}$有解，从而$\lambda h+\mu$即满足b的要求。

于是综合几个引理：

（Stone-Weierstrass定理，实版本，条件1）$C(X)$每个包含常值函数的分离子代数在$C(X)$中稠密。

证：设这个子代数为H，那么它的闭包$\bar{H}$也是一个包含常值函数的子代数（只需验证子代数，而有界函数的一致收敛保持乘积，故的确是子代数）

因此只需证明$\bar{H}$是一个格，然后运用引理2即证。

由于存在一列多项式$\{p_n\}$在$[-1,1]$上一致地收敛到$|x|$，那么$\{p_n(\frac{f(x)}{||f(x)||})\}\rightrightarrows\frac{|f(x)|}{||f(x)||}$在$X$上。

于是$\{||f(x)||\cdot p_n(\frac{f(x)}{||f(x)||})\}\rightrightarrows|f(x)|$，但前者的每一项都是$\bar{H}$中元素，于是若$f(x)\in H$，$|f(x)|\in H$

从而说明H是格，得证。

这个定理条件还存在变体。

（**Stone-Weierstrass定理，实版本，条件2**）$C(X)$每个不在X中点消失的分离子代数在$C(X)$中稠密。

证：我们说明这样的子代数H满足引理1.

首先同理条件1中的证明知H是格，只需验证b.

由于H分离且在每点都不消失，则
$\exists g,h,k\in H,\ s.t.\ g(x_1)\neq g(x_2),h(x_1)\neq 0,k(x_2)\neq 0$

取$u(x)=[g(x)-g(x_1)]k(x),\ \ v(x)=[g(x)-g(x_2)]h(x)$

那么$f(x)=c_1v(x)/v(x_1)+c_2u(x)/u(x_2)$满足要求。

自然的想法是这个结论能否推广到复值函数，然而不加强一些条件是不行的。

下文中$C(X)$指$C^{\mathbb{C}}(X)$

（**Stone-Weierstrass定理，复版本反例，条件1&2**）$C(X)$每个不在X中点消失的且包含常值函数的分离子代数在$C(X)$中可能不稠密。

设X为复平面上单位圆，H为全体形如$f(e^{i\theta})=\sum\limits_{n=0}^{N}c_ne^{in\theta}$的函数，它满足条件1和2，

于是$\forall h\in H,\ \displaystyle\int_0^{2\pi}h(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta=0$，从而这对于闭包$\bar{H}$中每个元素都成立，但是考虑$g(e^{i\theta})=e^{-i\theta}$，$\displaystyle\int_0^{2\pi}g(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta=2\pi$，于是$g\notin\bar{H}$，从而$H$在$C(X)$中不稠密。

然而加上自共轭条件后定理就可以推广了：

（**Stone-Weierstrass定理，复版本，条件1或2**）$C(X)$每个满足条件1或2且自共轭的子集都在$C(X)$中稠密。

证：

条件1：记H_0为H中全体实值函数，那么H_0在$C^{\mathbb{R}}(X)$中满足条件1：$f\in H$则$\mathfrak{R}(f),\mathfrak{I}(f)\in H_0$（考虑$(f+\bar{f})/2$等即可），那么分离性由$H$的分离性即可推出（复数不同则实部虚部至少有一不同）

从而H_0在$C^{\mathbb{R}}(X)$中稠密，于是$H = H_0 + i \cdot H_0$自然在$C(X)$中稠密。

条件2的情况是同理的。

参考：

W.Rudin. Principles of Mathematical Analysis

H.L.Royden, P.M.Fitzpatrick Real Analysis

GTM192 Elements of Functional Analysis