Complex Geometry

ZIXI LI

Qiuzhen College, Tsinghua University

2023

目录

第一部分

预备内容

第一章 多复分析

首先引进一些记号：$z=(z_1,\cdots,z_n)$ 代表 $\mathbb{C}^n$ 中一点。对于 $\mathbb{C}^n$ 中开集 U，记 $C^\infty(U), C^\infty(\bar{U})$ 为 U 上/包含 $\bar{U}$ 的某个开集上有定义的光滑函数芽全体（后者需商去等价关系：若 f,g 分别在某个包含 $\bar{U}$ 的开集上有定义，并且存在一个包含 $\bar{U}$ 的开集 V，使得 f,g 限制在 V 上相同，则记 $f\sim g$）。

考虑 $\mathbb{C}^n\cong\mathbb{R}^{2n}$ 的余切空间，它由 $\{dx_i,dy_i\}$ 张成，记 $dz_i=dx_i+\sqrt{-1}dy_i; d\bar{z}_i=dx_i-\sqrt{-1}dy_i$，那么它们也是余切空间的一组基。

这组基在切空间上的对偶基记为：$\frac{\partial}{\partial z_i}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i}); \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_i})$. 于是全微分公式变为 $df=\sum\frac{\partial f}{\partial z_i}dz_i+\sum\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i}d\bar{z}_i$。

1.1 Cauchy 公式

回想单复变中的结果，称 C^∞ 函数 f 在开集 $U\subset\mathbb{C}$ 上是全纯的，如果 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$；称它是解析的，如果对于任何 $z_0\in U$，存在一个幂级数 $\sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$，在某个圆盘 $\Delta(z_0,\varepsilon)=\{z||z-z_0|<\varepsilon\}$ 上一致地收敛到 f，且绝对收敛。

单复分析的重要结果是：

定理 1.1.1. 对于单复变函数 $f=f(z)$，f 在开集 U 上全纯 $\iff$ f 在开集 U 上解析。

为了证明这个结果，我们来说明如下的 Cauchy 公式。

定理 1.1.2 (Cauchy 公式). 对于 $\mathbb{C}$ 中的一个开圆盘 Δ，$f\in C^\infty(\bar{\Delta})$，那么：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)dw}{w-z}+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\Delta}\frac{\partial f(w)}{\partial\bar{w}}\cdot\frac{dw\wedge d\bar{w}}{w-z}$$

证明. 对（复 $(1,0)-$ 型）微分形式 $\eta=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\cdot\frac{f(w)dw}{w-z}$ 在 $\Delta-\Delta(z,\varepsilon)$ 上应用 Stokes 定理（$\int_{\partial D}\eta=\int_D\bar{\partial}\eta$），得到：

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta(z,\varepsilon)}\frac{f(w)dw}{w-z}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)dw}{w-z}+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\Delta-\Delta(z,\varepsilon)}\frac{\partial f(w)}{\partial\bar{w}}\cdot\frac{dw\wedge d\bar{w}}{w-z}$$

现在令 $\varepsilon\to 0^+$，此时令 $w-z=re^{i\theta}$，那么：

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta(z,\varepsilon)}\frac{f(w)dw}{w-z}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^{2\pi}f(z+\varepsilon e^{i\theta})\to f(z)$$

另一方面：$dw\wedge d\bar{w}=-2\sqrt{-1}dx\wedge dy=-2\sqrt{-1}rdr\wedge d\theta$，于是 $|\frac{\partial f(w)}{\partial\bar{w}}\cdot\frac{dw\wedge d\bar{w}}{w-z}|=2|\frac{\partial f}{\partial\bar{w}}dr\wedge d\theta|\leq c|dr\wedge d\theta|$，从而绝对可积，于是自然趋向于 0。
因此取极限后式子两端即变为 Cauchy 公式。 □

现在来证明定理 1.1.1。

证明. (定理 1.1.1)
首先假定全纯，即 $\partial f/\partial\bar{z}=0$，那么对于 $z_0\in U$，取充分小的圆盘 $\Delta(z_0,\varepsilon)\subset U$，那么由定理 1.1.2，对于任何 $z\in\Delta$：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)dw}{w-z}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)dw}{(w-z_0)(1-\dfrac{z-z_0}{w-z_0})}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)dw}{(w-z)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n$$

（最后的极限-求和交换是因为幂级数是内闭一致收敛的）
因此我们得到了一个在某个圆盘上一致收敛到 f 且绝对收敛的幂级数。

反过来，假定 f 可以在某个圆盘 Δ 上表示成 $f(z)=\sum a_nz^n$，绝对收敛，且一致地收敛到 f。由于 $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}(z-z_0)^n=0$，于是对于 f 的部分和运用 Cauchy 公式，再利用一致收敛性取极限，得到：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f(w)dw}{w-z}$$

两侧作用 $\partial/\partial\bar{z}$，得到了：

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}f(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}f(w)\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\frac{1}{w-z})dw=0$$

从而全纯。

□

定理 1.1.3 ($\bar{\partial}$–Poincare 引理). 对于开圆盘 $\Delta\subset\mathbb{C}$ 和任何 $g(z)\in C^\infty(\bar{\Delta})$，$\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}f=g(z)$ 有解，其中一个解为：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\Delta}\frac{g(w)}{w-z}dw\wedge d\bar{w}$$

证明. 为了处理 Δ 是开的这一问题，我们做出如下拆分：
对于任何 $z_0\in\Delta$，选取一个 ε 使得 $\Delta(z_0,\varepsilon)\subset\Delta$，将 g 拆分为 g_1+g_2 使得 g_1 在 $\Delta(z_0,2\varepsilon)$ 外消失，而 g_2 在 $\Delta(z_0,\varepsilon)$ 内消失。
对于 g_2，取 $f_2(z)=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int_{\Delta}\frac{g_2(w)}{w-z}dw\wedge d\bar{w}$，那么它在 $\Delta(z_0,\varepsilon)$ 内是 C^∞ 的。同时，

$$\frac{\partial f_2}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\Delta}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\frac{g_2(w)}{w-z})dw\wedge d\bar{w}=0$$

对于 g_1，取 $f_1(z)=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int_{\Delta}\frac{g_1(w)}{w-z}dw\wedge d\bar{w}$，对 $w-z$ 做极坐标换元可以立刻看出它的光滑性（分母上的 $w-z$ 项消失），并且令 $u=w-z=re^{i\theta}$ 后有：

$$\frac{\partial f_1}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\int_{\mathbb{C}}g_1(w)\cdot\frac{dw\wedge d\bar{w}}{w-z}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int_{\mathbb{C}} g_1(u+z) \cdot \frac{du \wedge d\bar{u}}{u} \\
&= -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int g_1(z+re^{i\theta}) \cdot dr \wedge d\theta \\
&= -\frac{1}{\pi} \int \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_1(z+re^{i\theta}) \cdot dr \wedge d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} g_1(w) \cdot \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z} \\
&= g_1(z)
\end{aligned}
$$

最后一步由 Cauchy 公式得到：g_1 在 $\partial\Delta$ 上消失。
于是结合两者即证。 □

1.2 多复变函数

回忆全微分公式 $df = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \sum \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i$，记第一项为 ∂f，第二项为 $\bar{\partial} f$。同样地，称 C^∞ 函数 f 在开集 $U \subset \mathbb{C}^n$ 上是全纯的，如果 $\bar{\partial} f = 0$，这等价于对于每个变量 z_i，将 f 视作 z_i 的函数时 f 全纯。
同样地，如果 f 能够处处局部地展开成多元幂级数 $\sum_{I=0}^{\infty} \sum_{i_1+\cdots+i_n=I} a_{i_1,\cdots,i_n}(z_1-w_1)^{i_1}\cdots(z_n-w_n)^{i_n}$，并且级数绝对收敛，那么称 f 在开集 U 上全纯。

定理 1.2.1. *对于多复变函数 $f=f(z)$，f 在开集 U 上全纯 $\iff$ f 在开集 U 上解析。*

证明. 如果 f 解析，那么完全同定理 1.1.1的证明可以证明其全纯。
反过来，如果 f 是全纯的，仅以 f 为二元函数为例给出对应的幂级数，对于 $z_0 \in U \subset \mathbb{C}^2$，取 $\Delta = \Delta(z_0, r) \subset U$，对于 $(z_1, z_2) \in U$

$$
f(z_1,z_2) = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^2 \int_{w_2 - z_{0_2} = r} \int_{|w_1 - z_{0_1} = r} \frac{f(w_1,w_2)dw_1dw_2}{(w_1-z_1)(w_2-z_2)}
$$

然后同理定理 1.1.1将 $\frac{1}{(w_1-z_1)(w_2-z_2)}$ 展开为成幂级数 $\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(z_1-z_{0_1})^m(z_2-z_{0_2})^n}{(w_1-z_{0_1})^{m+1}(w_2-z_{0_2})^{n+1}}$ 即可，代入积分是即得到了一个幂级数的局部展开。 □

如同单复分析的情况，最大模原理依然成立。于是自然唯一性定理（连通开集上的全纯函数如果在某个开集上相等，那么处处相等）也成立。
接下来将要介绍一个展现出多复分析和单复分析差异的结果。为了证明它，我们先来说明一个多复分析版本的 $\bar{\partial}-$Poincare 引理。

定理 1.2.2 (多复分析的 $\bar{\partial}-$Poincare 引理)**.** *假定 $n \geq 2$，对于具有紧支集的区域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的 (0,1)-形式 $W = f_1 d\bar{z}_1 + \cdots + f_n d\bar{z}_n$（紧支集指各个 f_i 都是紧支的），并且 $suppW \subset \Omega$ 且前者为紧集。如果 $\bar{\partial} W = 0$，那么存在 $g \in C^\infty(\Omega)$，使得 $\bar{\partial} g = W$，且 $suppg$ 也是紧的。*

证明. 由于 $\bar{\partial} W=\sum_{k=1}^n\sum_{t=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_t} d\bar{z}_t \wedge d\bar{z}_k=0$，可知 $\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_k}=\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_1}$。
构造 $g(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\iint_{\mathbb{C}}\frac{f_1(w,z_2,\cdots,z_n)}{w-z_1}dw\wedge d\bar{w}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\iint_{\mathbb{C}}\frac{f_1(w+z_1,z_2,\cdots,z_n)}{w}dw\wedge d\bar{w}$。
由于

$$
\begin{aligned}
\bar{\partial} g &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{k=1}^n\iint_{\mathbb{C}}\frac{\partial f_1(w+z_1,z_2,\cdots,z_n)}{\partial \bar{z}_k}\frac{dw\wedge d\bar{w}}{w}d\bar{z}_k \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{k=1}^n\iint_{\mathbb{C}}\frac{\partial f_k(w+z_1,z_2,\cdots,z_n)}{\partial \bar{z}_1}\frac{dw\wedge d\bar{w}}{w}d\bar{z}_k \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{k=1}^n\iint_{\mathbb{C}}\frac{\partial f_k(w,z_2,\cdots,z_n)}{\partial \bar{z}_1}\frac{dw\wedge d\bar{w}}{w-z_1}d\bar{z}_k \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{k=1}^n(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\iint_{\mathbb{C}}\frac{f_k(w,z_2,\cdots,z_n)}{w-z_1}dw\wedge d\bar{w})d\bar{z}_k
\end{aligned}
$$

由多元的 Cauchy 公式，$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\iint_{\mathbb{C}}\frac{f_k(w,z_2,\cdots,z_n)}{w-z_1}dw\wedge d\bar{w}=f_k(z)$，于是 $\bar{\partial} g=\sum_{k=1}^n f_k(z)d\bar{z}_k=W$

设 $\mathrm{supp}W\subset\Delta=\Delta(0,R)$，那么在 $\mathbb{C}^n-\bar{\Delta}$ 上，$\partial g=0$，即 g 在 $\mathbb{C}^n-\bar{\Delta}$ 上全纯。
记 $D=\{z=(z_1,\cdots,z_n)||z_2|>R\}$，那么由支撑集的定义，在 D 上 $f_1=0$。于是由 g 的构造知 g 在 D 上为 0。那么考虑唯一性定理即有 g 在 $C^n-\bar{\Delta}$ 上为 0，从而 $\mathrm{supp}g$ 是紧集。 □

定理 1.2.3 (Hartogs 现象). 对于区域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$，$K$ 是 Ω 的紧子集，并且 $\Omega-K$ 连通，那么任何 $\Omega-K$ 上的全纯函数可以全纯地延拓到 Ω 上。
作为推论立刻得到多复变函数不存在孤立极点。

证明. 存在某个光滑函数 φ，使得紧集 $\mathrm{supp}\varphi\subset\Omega$，并且在 K 的某个开邻域上恒取 1，定义 $W=f\cdot\bar{\partial}\varphi$。那么这样的 W 在 Ω 上处处有定义，并且在 K 上取值为 0，并且 $\mathrm{supp}W\subset\mathrm{supp}\varphi$。

由定理 1.2.2，由于 $\mathrm{supp}W$ 能被某个圆盘 Δ 包含，并且 $\bar{\partial} W=\bar{\partial} f\cdot\bar{\partial}\varphi$ 处处为 0。当然存在一个 g 使得 $\bar{\partial} g=W$，并且 $\mathrm{supp}g$ 为紧集。

同样，我们有 $\bar{\partial} g=0$ 在 $\mathbb{C}^n-\mathrm{supp}\varphi$ 上成立，于是在其上全纯。但是另一方面 $\mathrm{supp}g$ 是紧的，于是一定存在一个 $\mathbb{C}^n-\mathrm{supp}\varphi$ 的无界的连通分支 V，使得在其上 $g=0$。(唯一性定理)

取 $F=g+(1-\varphi)f$，那么 $\bar{\partial} F=\bar{\partial} g+\bar{\partial} f(1-\varphi)-f\cdot\bar{\partial}\varphi=(\bar{\partial} g-W)+\bar{\partial} f(1-\phi)=0$ 在 Ω 上处处成立，于是全纯。

另一方面 $\partial V\cap supp\ \varphi\neq\phi$，于是 $\Omega\cap V\neq\varnothing$，并且在其上 $F|_{\Omega\cap V}=f|_{\Omega\cap V}$，于是由 $\Omega-K$ 的连通性和唯一性定理知 $F|_{\Omega-K}=f$。 □

1.3 Weierstrass 预备定理和除法定理

首先回忆在单复变中，每个非恒零的解析函数在任一点都能局部地写成 $f(z)=(z-z_0)^n u(z), u(z_0)\neq 0$，于是作为推论立刻得到零点的孤立性。

接下来，我们研究多复变函数的零点的局部性态。

定义 1.3.1 (k 阶正则). 设 $f(Z)=f(z_1,\cdots,z_n)$ 是 $Z=0\in\mathbb{C}^n$ 的某个邻域上的全纯函数，如果 $z_n=0$ 是单全纯函数 $f(0,\cdots,0,z_n)$ 的 k 阶零点，则称 f 在 $Z=0$ 处对 z_n 方向 k 阶正则。

定义 1.3.2 (Weierstrass 多项式). 设 $h(Z)=z_n^k+a_1(z_1,\cdots,z_{n-1})z_n^{k-1}+\cdots+a_k(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 是定义在 $Z=0\in\mathbb{C}^n$ 的某个邻域上的函数；$a_i(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 都是在 $0\in\mathbb{C}^{n-1}$ 的某个邻域上的全纯函数，且 $a_i(0,\cdots,0)=0,\forall i$，那么称 h 是 z_n 的 k 阶 Weierstrass 多项式。

自然，z_n 的 k 阶 Weierstrass 多项式是 z_n 方向上 k 阶正则的。我们将要证明这两者之间的关系，首先先给出一个描述 k 阶正则函数零点局部性态的结果。

定理 1.3.3. *设 $f(Z)=f(z_1,\cdots,z_n)$ 在原点 $Z=0\in\mathbb{C}^n$ 的某个邻域上全纯，并且对 z_n 方向 k 阶正则。那么存在一个 $\delta'=(\delta_1,\cdots,\delta_{n-1})$ 和 δ_n，使得 $\forall Z'\in D_{n-1}(0,\delta')$（$n-1$ 维多圆盘）$\subset\mathbb{C}^{n-1}$，$f(Z)=f(Z',z_n)$ 作为 z_n 的全纯函数在圆盘 $D_1(0,\delta_n)\subset\mathbb{C}^1$ 中有且仅有 k 个零点。*

证明. 由单复变的零点孤立性定理，可以取 δ_n 充分小，使得 $f(0,\cdots,0,z_n)$ 作为 z_n 的全纯函数在 $D_1(\bar{0},\delta_n)$ 中有且仅有 $z_n=0$ 这一个零点。

令 $m=\min_{|z_n|=\delta_n}|f(0,\cdots,0,z_n)|$，由 $\partial D_1(0,\delta_n)=\{z_n||z_n|=\delta_n\}$ 的紧性知，当然存在一个 $\delta'=(\delta_1,\cdots,\delta_{n-1})$，对于任何 $Z'\in D_{n-1}(0,\delta')$ 和 $z_n\in\partial D_1(0,\delta_n)$ 均有:

$$|f(Z',z_n)-f(0,\cdots,0,z_n)|<m\le|f(0,\cdots,0,z_n)|$$

从而由 Rouch 定理知 $f(Z',z_n)$ 和 $f(0\cdots,0,z_n)$ 关于 z_n 在圆盘 $D_1(0,\delta_1)$ 内的零点个数（计重数）相等，于是得证。 □

我们希望将单复变中全纯函数的局部表示推广到多复变上，这即为接下来的定理描述的内容。

定理 1.3.4 (Weierstrass 预备定理). *设函数 $f(Z)$ 在 $Z=0\in\mathbb{C}^n$ 的邻域上解析，在 $Z=0$ 处对 z_n 方向 k 阶正则，则存在 $Z=0$ 的一个充分小邻域 U 和 U 上唯一确定的一个 z_n 的 k 阶 Weierstrass 多项式 $h(Z)$，和一个在 U 上唯一确定的处处不为零的全纯函数 $u(z)$，使得如下成立：*

$$f(Z)=h(Z)u(Z),\forall Z\in U$$

证明. 由定理 1.3.3，取出满足要求的 $D_{n-1}(0,\delta')$ 和 δ_n。对于 $Z'\in D_{n-1}(0,\delta')$，设其 k 个零点为 $b_1(Z'),\cdots,b_k(Z')$。

由留数定理：设 $h(z),g(z)$ 是分段光滑边界的有界闭区域 $Om\bar{e}ga\subset\mathbb{C}$ 的邻域上的全纯函数，且 h 在 $\partial\Omega$ 上处处不为零。若 $z_1,\cdots,z_k$ 是 $h(z)$ 在 Ω 内的 $t_1,\cdots,t_k$ 阶零点，那么：

$$\sum_{i=1}^k t_ig(z_i)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Omega}g(w)\frac{h'(w)}{h(w)}dw$$

令 $h(z_n)=f(Z',z_n),g(z_n)=z_n^m$，于是对于任意自然数 m，成立：

$$\sum_{i=1}^k b_i^m(Z')=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|w|=\delta_n}w^m\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial w}f(Z',w)}{f(Z',w)}dw$$

因此对于任意 m，$\sum b_i^m(Z')$ 是关于 Z' 的全纯函数。（在积分号下求导即可）

于是任意 $b_1(Z'),\cdots,b_k(Z')$ 的对称多项式都可以表示成 $\sum b_i^m(Z')$ 的多项式，从而都是 Z' 的全纯函数。

因此，令

$$h(Z)=h(Z',z_n)=\prod_{i=1}^{k}(z_n-b_i(Z'))=z_n^k+a_1(Z')z_n^{k-1}+\cdots+a_k(Z')$$

是满足要求的 Weierstrass 多项式。并且对于任何固定的 Z'，$h(Z',z_n)$ 和 $f(Z',z_n)$ 在 $D_1(0,\delta_n)$ 内零点相同。因此只需 $f(Z)/h(Z)$ 在 $D_{n-1}(0,\delta')\times D_1(0,\delta_n)$ 上全纯且处处不为 0，而这是显然的。

下面证明唯一性。我们知道若使 $f=uh$，h 的零点被 f 的零点完全决定，另一方面 h 的首项系数固定为 1，于是立刻就得到了唯一性。 □

作为定理 1.3.4的推论，我们有如下关于主解析集的结果，我们将在后文中使用它。

推论 1.3.5. 对于 z_n 方向上正则的全纯函数 $f(z_1,\cdots,z_n)$，其零点集到 $z_n=0$ 的投影是某个全纯函数零点集的有限覆叠。

定义 1.3.6 (解析集)**.** 对于区域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$，称闭集 $A\subset\Omega$ 为解析集，如果 $\forall z_0\in\Omega$，存在邻域 $U(z_0)$，和其上的全纯函数 $g_1,\cdots,g_m$ 使得 $A\cap U(z_0)=\{z\in U(z_0)|g_1(z)=\cdots=g_m(z)=0\}$。

定理 1.3.7. 区域 Ω 的解析集 A 一定是无处稠密的（没有内点）

证明. 如果内部 $IntA$ 非空，设 $z_0\in\Omega$ 是 $IntA$ 的聚点，那么 $z_0\in\Omega$。从而存在 $U(z_0)\subset\Omega$ 以及其上全纯函数 $g_1,\cdots,g_m$ 使得 $A\cap U(z_0)=\{z\in U(z_0)|g_1(z)=\cdots=g_m(z)=0\}$。

而 $int\ A\cap U(z_0)$ 是非空开集，且 $g_1,\cdots,g_m$ 在其上恒为 0，于是由唯一性定理 $g_1,\cdots,g_m\equiv 0$，故 $z_0\in A$。于是 $IntA$ 既开又闭，又由 Ω 连通，于是只有 $IntA=\Omega$，矛盾。 □

定理 1.3.8 (Riemann 延拓定理)**.** 设区域 $D\subset\mathbb{C}^n$，解析集 $S\subset D$，对于 $D-S$ 上的全纯函数 f 满足 $\forall z\in S$，存在 z 的邻域 $V(z)$ 使得 f 在 $V(z)-S$ 上有界，那么 f 可以延拓到 D 上。

证明. 无妨 $n\geq 2$，只需证明 $\forall z\in S$，存在一个邻域 $U\subset D$ 使得 $f|_{U-S}$ 可以全纯延拓到 U 上。（唯一性定理保证了这些延拓一定相容）

通过平移无妨 $z=0\in S$，取充分小邻域 V 使得 f 在 $V-S$ 上有界，$f_1,\cdots,f_m$ 为 V 上全纯函数使得 $S\cap V=\{z\in V|f_1(z)=\cdots=f_m(z)=0\}$。当然可以选取 f_1 使得 $f_1\not\equiv 0$，$f_1(0,\cdots,0,z_n)\not\equiv 0$ 在 V 上处处成立。

由于 S 是无处稠密的闭集，于是存在 $\delta_0>0$ 使得 $f_1(0,\cdots,0,z_n)\neq 0,\forall|z_n|=\delta_0$，因此 $\{z\in V|z=(0,\cdots,0,z_n),|z_n|=\delta_0\}\subset V-S$。然而由于 $V-S$ 是开集，一定存在 $r_0>0$ 使得 $\{z=(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n)||z_j|<r_0,j=1,\cdots,n-1,|z_n|=\delta_0\}\subset V-S.$

记 $U:=\{z=(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n)||z_j|<r_0,j=1,\cdots,n-1,|z_n|<\delta_0\}$，定义 $F:U\to\mathbb{C}$ 为

$$F(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|\xi|=\delta_0}\frac{f(z_1,\cdots,z_{n-1},\xi)}{\xi-z_n}d\xi$$

容易验证它是 U 上的全纯函数。

对于固定的 $(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 使得 $|z_j|<r_0,j=1,\cdots,n-1$，取 $\varphi(z_n):=f(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n)$，其中 $|z_n|<\delta_0,(z_1,\cdots,z_n)\notin S$。由单复变的零点孤立性，$\{z=(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n):|z_n|\leq\delta_0\}\cap S$ 是孤立点集，且 f 在 $U-S$ 上有界，于是可以全纯延拓。从而由 Cauchy 积分公式：

$$f(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n)=\varphi(z_n)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|\xi|=\delta_0}\frac{\varphi(\xi)}{\xi-z_n}d\xi=F(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n),\forall(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n)\in U-S.$$

□

在本节剩余部分，我们将研究全纯函数芽环的代数性质。

注记. 这部分中用到的非显然的代数结果是：R 是 UFD，$u, v \in R[t]$ 互素，那么存在 $\alpha, \beta \in R[t]$ 互素，使得 $\alpha u + \beta v = \gamma$，并且 $\gamma \in R, \gamma \neq 0$。

定义 1.3.9 (全纯函数芽环). 考虑全体在 $0 \in \mathbb{C}^n$ 的任一邻域上的全纯函数构成的集合，其上定义等价关系：$f \sim g \iff \exists W \subset U \cap V, f|_W = g|_W$，其中 U, V 为 f, g 的定义域。容易验证这个集合商去等价关系在自然的运算下构成了一个环，称为全纯函数芽环 $\mathscr{O}_n = \mathscr{O}_{n,0}$。一般地，将 0 换为任意一点 $z \in \mathbb{C}^n$ 得到的环记为 $\mathscr{O}_{n,z}$

由唯一性定理，可以很容易地证明 $\mathscr{O}_{n,z}$ 是整环。特别地它还是一个局部环，因为有着显然的映射 $ev : \mathscr{O}_{n,z} \to \mathbb{C}$。

命题 1.3.10. *如果 f, g 在 $\mathscr{O}_{n,z}$ 中的像是互素的；那么存在 ε 使得对于任何 z' 满足 $||z' - z|| < \varepsilon$，都有 f, g 在 $\mathscr{O}_{n,z'}$ 中的像也是互素的。*

证明. 无妨 $z = 0$，f, g 都是对 z_n 方向正则，并且 f, g 是 Weierstrass 多项式。另外对于任何充分小的 $(z_1, \cdots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$，有 $f(z_1, \cdots, z_n) \not\equiv_{z_n} 0$。

于是由前文提及的代数性质，有

$$\alpha f + \beta g = \gamma, \alpha, \beta \in \mathscr{O}_{n-1}[w], \gamma \in \mathscr{O}_{n-1}$$

在 0 的某个邻域上成立。

如果对于某个 $z_0 \in \mathbb{C}^n$，使得 z_0 的前 $n-1$ 个分量满足前文充分小的假定。f, g 在芽环中不互素，那么首先 f, g 不能都是单位：因为极大理想的性质保证了它们一定互素。于是假定 $f(z_0) = g(z_0) = 0$，如果它们在 $\mathscr{O}_{n,z_0}$ 有公因子 $h(z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n)$。自然 $h(z_0) = 0$，那么：

$$h|f, h|g \implies h|\gamma \implies h \in \mathscr{O}_{n-1}$$

因此 h 在固定前 $n-1$ 个分量下满足 $h \equiv_{z_n} 0$，这与前文 f 的假定矛盾。

因此我们说明了对于充分小的 z_0 都有互素的性质保持，而这就是目标结果。 □

为了更好地研究 $\mathscr{O}_n$ 的代数性质，我们证明如下重要结果。

定理 1.3.11 (Weierstrass 除法定理). *设 $h \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ 为 k 阶 Weierstrass 多项式，那么 $\forall f \in \mathscr{O}_n$，存在唯一的次数小于 k 的 Weierstrass 多项式 $r \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$，以及 $g \in \mathscr{O}_n$，使得：*

$$f = g \cdot h + r$$

证明. 首先证明唯一性，如果 $f = g_1 h + r_1 = g_2 h + r_2$，那么 $(g_1 - g_2)h = r_2 - r_1$。如果 $g_1 \neq g_2$，那么由定理 1.3.4，$(g_1 - g_2)h$ 是对 z_n 方向 k 阶正则的；但是 $r_2 - r_1$ 次数不超过 k，于是不可能是对 z_n 方向 k 阶正则的，这就引发了矛盾。

再来证明存在性。下面我们无妨将 f,g,h,r 都看做它们在一个充分小多圆盘区域 Δ 上的代表元。取

$$g(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|w_n|=r_n}\frac{f(z_1,\cdots,z_{n-1},w_n)}{h(z_1,\cdots,z_{n-1},w_n)(w_n-z_n)}dw_n$$

那么

$$r=f-gh=r(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n)$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|w_n|=r_n}\frac{f(z_1,\cdots,z_{n-1},w_n)}{h(z_1,\cdots,z_{n-1},w_n)}\frac{h(z_1,\cdots,z_{n-1},w_n)-h(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n)}{w_n-z_n}dw_n$$

由于 $h(Z)$ 是 z_n 的 k 次 Weierstrass 多项式，那么 $\frac{h(z_1,\cdots,z_{n-1},w_n)-h(z_1,\cdots,z_{n-1},z_n)}{w_n-z_n}$ 是 w_n-z_n 的 $k-1$ 次 Weierstrass 多项式。于是 $r(Z)$ 也是 Weierstrass 多项式，且次数不超过 $k-1$。 □

注记. 另外，考虑多项式的带余除法后可以注意到 $f\in\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ 则立刻有 $g\in\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$。

接下来我们研究芽环 $\mathscr{O}$ 的分解性质，首先证明如下引理。

引理 1.3.12. *Weierstrass 多项式 $h\in\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ 是不可约的 $\iff$ 它在 $\mathscr{O}_n$ 中是不可约的。如果 h 是可约的，那么存在两个 Weierstrass 多项式 h_1,h_2 使得 $h=h_1h_2$。*

证明. 只需证明 h 在 $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ 中可约 $\iff$ 它在 $\mathscr{O}_n$ 中可约。

如果 $h_1,h_2\in\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ 且在其中都不是单位，并且 $h=h_1h_2$。只需证明它们不是 $\mathscr{O}_n$ 的单位。如果 h_1 是单位，那么 $h_2=h_1^{-1}h$，那么对 h_2,h 应用第 1.3 节知 $h_1^{-1}\in\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$，与 h_1 非 $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ 中的单位矛盾。

如果存在非单位的 $f_1,f_2\in\mathscr{O}_n$，使得 $h=f_1f_2$。由 Weierstrass 预备定理（定理 1.3.4）知存在 $\mathscr{O}_n$ 的单位 u_1,u_2 和 Weierstrass 多项式 h_1,h_2，使得 $f_j=u_jh_j,j=1,2$。从而 $h=(u_1u_2)(h_1h_2)$，那么比较零点处阶数知 $d(h_1)+d(h_2)=d(h)$。

现在对 h,h_1h_2 应用 Weierstrass 除法定理（定理 1.3.11），由唯一性知只能有商为 u_1u_2，余数为 0。从而 u_1u_2 也是 Weierstrass 多项式（第 1.3 节），于是只能是 1。 □

我们现在终于能够给出芽环的几个重要性质了。

命题 1.3.13. *$\mathscr{O}_n$ 是 UFD 环。*

证明. 归纳证明。定义 $\mathscr{O}_0=\mathbb{C}$，假定 $\mathscr{O}_{n-1}$ 是 UFD，那么由 Gauss 引理知 $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ 也是 UFD。由 Weierstrass 预备定理（定理 1.3.4），假定 f 在 z_n 方向是正则的（$f(0,\cdots,0,w)\not\equiv 0$），那么取 $f=gu$，u 是单位，$g\in\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$。

由 UFD 性，g 可以在不计单位的意义下唯一地分解成 $g=g_1\cdots g_m$。如果 $f=f_1\cdots f_k$ 是 $\mathscr{O}_n$ 中的不可约分解，当然每个 f_i 也是在 z_n 方向正则，$f_i=g_i'\cdot u_i'$，则：

$$f=\prod u_i'\cdot\prod g_i'=u\prod g_i$$

由于 $\prod g_i'$ 和 $g=\prod g_i$ 都是 Weierstrass 多项式，由定理 1.3.4的唯一性知 $g=\prod g_i$，于是由 UFD，g_i 和 g_i' 至多相差单位，从而说明了 $\mathscr{O}_n$ 也是单位。 □

命题 1.3.14. *$\mathscr{O}_n$ 是 Noetherian 环。*

证明. 仍然使用归纳法，假定 $\mathscr{O}_{n-1}$Noetherian，那么 $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ 也是。对于任何 $\mathscr{O}_n$ 的理想 I，固定一个非零的 $h \in I$，由 Weierstrass 除法定理（定理 1.3.11）$\forall f \in I$，有 $f = gh + r$。于是 $r = f - gh \in I$，故 $r \in I \cap \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$。

由于 Noetherian 性，$I \cap \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ 有限生成，于是 I 可以由这些生成元和 h 生成，从而有限生成，从而 $\mathscr{O}_n$Noetherian。 □

定理 1.3.15 (Weak Nullstellensatz). *若 $f \in \mathscr{O}_n$ 是环中的不可约元，并且 $h \in \mathscr{O}_n$ 在 $f(Z) = 0$ 这一零点轨迹上消失，那么在 $\mathscr{O}_n$ 中 $f|h$。*

证明. 由于仅仅让 f 改变一个单位，于是由 Weierstrass 预备定理（定理 1.3.4）可以假定 f 在 z_n 方向正则并且 $f \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$。

由于 f 是不可约的，于是 $f, \dfrac{\partial f}{\partial z_n}$ 在多项式环 $\mathscr{O}_{n-1}[z_n]$ 中是互素的。（考虑引理 1.3.12知 f 在多项式环中也是不可约的）

于是存在 $\alpha, \beta \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n], \gamma \in \mathscr{O}_{n-1}, \gamma \neq 0$ 使得 $\alpha f + \beta \dfrac{\partial f}{\partial z_n} = \gamma$。

如果对于固定的 $Z_0, f(Z_0, z_n) \in \mathbb{C}[z_n]$ 有重根 $z_n = u$, 那么此时 $f(Z_0, u) = \dfrac{\partial f}{\partial z_n}(Z_0, u) = 0$，于是 $\gamma(Z_0) = 0$。因此在 $\gamma(Z)$ 非零时，将 $f(Z, u)$ 视作 u 的 k 次多项式，那么它有 k 个互不相同的单根。

由 Weierstrass 除法定理（定理 1.3.11）$h = fg + r, r \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$。对于某个固定的 Z_0 使得 $\gamma(Z_0) \neq 0$，$h(Z_0, w)$ 至少有 k 个不同的根（关于 w 的方程），于是 $r(Z_0, w)$ 也是如此。但是 r 次数不超 k，于是只有 $r(Z_0, w) = 0, \forall w$。

那么利用唯一性定理，r 一定恒为 0，从而 $h = fg$ 成立。 □

1.4 解析簇

回忆定义 1.3.6，那里定义的解析集也称解析簇。更进一步，如果解析簇 V 可以局部地由一个全纯函数的零点集描述，那么称为主解析集，自然在一般情况下它是余 1 维的。

称解析簇 V 不可约，如果它不能表示成两个真子簇的并。称它在 $p \in V$ 处不可约如果存在一个小邻域 U' 使得 $V \cap U'$ 是不可约的。

命题 1.4.1. *对于不可约元 $f \in \mathscr{O}_n$，由 $V = \{f(z) = 0\}$ 定义的某个 0 的邻域的主解析集在 0 处是不可约的。*

证明. 如果 $V = V_1 \cup V_2$，那么存在全纯函数 f_1 在 V_1 上处处为 0，但在 V_2 上不是；同时也存在 f_2 在 V_2 上处处为 0，但在 V_1 上不是。由零点定理（定理 1.3.15）$f|f_1 f_2$。然而 f 是不可约元，于是是素元。因此 $f|f_1, f|f_2$ 至少成立一个。不妨 $f|f_1$，那么 f_1 在 V_2 上也处处消失，矛盾。 □

接下来我们介绍主解析集和解析簇的一些局部性质：

1. 对于 0 的某个邻域的主解析集 $V = \{f(z) = 0\}$，由于 $\mathscr{O}_n$ 是 UFD，于是有不可约元分解 $f = f_1 \cdots f_m$。设这些因子对应的主解析集为 $V_1, \cdots, V_m$，于是 $V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$。很容易验证这样的表示是唯一的。

于是对于主解析集 V 上任何一点 p，V 可以在 p 的邻域内唯一地局部表示为有限个主解析集的并。

2. 设 W 是由 $f, g = 0$ 定义的在 0 的某个邻域中的解析簇。如果它不包含一个子主解析集，那么一定有 f, g 互素。如果 W 不包含直线 $\{(z_1, \cdots, z_{n-1}) = 0\}$，当然可以通过一些操作使得 $\{f(z) = 0\}, \{g(z) = 0\}$ 都不包含它。于是可以无妨假定 f, g 都是 z_n 的 Weierstrass 多项式（因为在局部上乘以一个单位并不会影响解析集）

令 $\gamma = \alpha f + \beta g \in \mathscr{O}_{n-1}, \alpha, \beta \in \mathscr{O}_{n-1}[z_n]$。我们现在证明 W 在投影映射 $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ 下的像正是 γ 的零点集。

由 Weierstrass 除法定理，取 $\alpha = hg + r$，那么 $\gamma = rf + (\beta + hf)g$。如果对于某个 $z \in \mathbb{C}^{n-1}$，γ 在其上消失但是 f, g 在 $\pi^{-1}(z)$ 中没有公共零点。因此 r 在 g 的所有零点上都消失（这里讨论的是某个固定的 $\pi^{-1}(z)$ 上情况），因此由 $\deg r < \deg g$ 知 r 在其上恒为 0，于是 $\beta + hf$ 也是如此。因此在 $\gamma - \pi(W)$ 的原像上，$r, \beta + hf$ 都恒为 0，然而 $r, \beta + hf$ 是互素的，于是矛盾。（因为它们不可能生成出常函数 1）

于是我们证明了 $\pi(W)$ 是 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中原点附近的主解析集。那么对主解析集应用推论 1.3.5，即可得到 W 到某个 $\mathbb{C}^{n-2}$ 子空间的投影是有限覆叠。

3. 设 $V \subset U \subset \mathbb{C}^n$ 是某个在 $0 \in V$ 处不可约的解析簇，使得对于任何充分小的 0 的邻域 Δ，$\pi(V \cap \Delta)$ 包含 0 在 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中的某个邻域。其中 $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ 是投影映射。

设在 0 处 V 由 $f_1, \cdots, f_k$ 描述。如果 f_i 没有公因子，那么 V 一定包含在两个互素的全纯函数决定的解析集中。那么由 2.$\pi(V \cap \Delta)$ 一定是一个 $\mathbb{C}^{n-1}$ 的真子簇。但是解析集是无处稠密的（定理 1.3.7），于是这和 $\pi(V \cap \Delta)$ 包含某个邻域矛盾。因此全体 f_i 有公因子，设最大公因子为 g。

于是 $V = \{g = 0\} \cup \{f_1/g = \cdots = f_k/g = 0\}$。由不可约性，只有 $V = \{g = 0\}$，从而 V 是主解析集。

以上 1~3 向我们展示了解析集的局部性态，对于一般的解析集我们也有类似结论。

1. 任何解析簇在其上某点局部可以表示为若干不可约子簇的并，并且这些子簇互不包含。
2. 任何解析簇都可以局部地表示成一个多圆盘到其上的主解析集的有限覆叠。
3. 如果 $V \subset \mathbb{C}^n$ 不包含直线 $z_1 = \cdots = z_{n-1} = 0$，那么 V 与 0 的邻域在投影映射 $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ 下的像是 $\mathbb{C}^{n-1}$ 的解析子簇。

第二章　复流形

2.1　复流形

定义 2.1.1 (复流形). M 是 C_2 的 Hausdorff 空间，其上有一组开覆盖坐标卡 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 和 U_α 到 $\mathbb{C}^m$ 的某个开集的同胚映射 $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^m$。并且 $\phi_\alpha \circ \phi\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 是全纯映射。

那么称 M 是 m 维复流形。

称开集 $U \cap M$ 上的函数是全纯的，如果将其拉到坐标域上是全纯的；同样地可以定义复流形之间的全纯映射。

自然，m 维复流形是 $2m$ 维实流形；但是反过来不一定成立。

例子. *1.1 维复流形称为 Riemann 曲面。*

2.$\mathbb{C}P^n$ 是 n 维复流形，它有显然的坐标卡：$\mathbb{C}P^n = \cup_{i=1}^{n+1}\{z_{i\neq 0}\}$。另外 $\mathbb{C}P^1$ 同构与 Riemann 球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

3. 设 $\Lambda = \mathbb{Z}^{2n}$，那么 $\mathbb{C}^n/\Lambda$ 自然有着复流形结构，称为复环面 (Complex tori)。

4.$\mathbb{C}^2 - \{0\}$ 在 $z \mapsto 2z$ 作用下的轨道空间称为 Hopf 曲面，可以验证它是紧复流形但不能被嵌入任何一个 $\mathbb{C}P^n$。

一般地，对于覆叠 $\pi : M \to N$，如果 N 是复流形，那么这诱导出了 M 上的复流形结构。如果 M 是复流形，如果 M 的所有保持投影映射 $p : M \to N$ 的自同胚都是全纯的 M 到自身的全纯映射。

将复流形 M 视作 $2m$ 维实流形，那么它自然有（实）切空间 $T_{\mathbb{R},p}(M) = \mathbb{R}\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\}$，于是有复化的切空间

$$T_{\mathbb{C},p}(M) = T_{\mathbb{R},p}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\} = \mathbb{C}\{\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\}$$

特别地，称 $\mathbb{C}\{\frac{\partial}{\partial z_i}\}$ 为全纯切空间 T'，类似地定义反全纯切空间 T''。于是自然 $T = T' \oplus T''$

任何流形间的光滑映射诱导了实切空间的切映射，于是通过张量积诱导了复切空间的切映射。但一般情况下这并不能诱导全纯切空间的映射。实际上我们有：

命题 2.1.2. *$f : M \to N$ 是全纯的 $\iff$ 对每一点 $p \in M$，$f_*(T'_p(M)) \subseteq T'_{f(P)}(N)$*

证明. 设 $p, f(p)$ 的局部坐标系分别为 $\{z_i\}, \{w_i\}$。由于

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial f^\beta}{\partial z^i} \cdot \frac{\partial}{\partial w^i} + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial f^{\bar{\beta}}}{\partial z^i} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{w}^i}$$

那么由全纯映射定义命题显然。 □

上述证明实际上用到了映射在不同基下的 Jacobian，这部分内容是简单的，只证明如下结果。

命题 2.1.3. 相同维数的复流形间的全纯映射是保定向的。

证明是简单的，只需注意 Jacobian 的行列式是一个非负实数。特别地，$dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n = (\frac{\sqrt{-1}}{2})^n (dz_1 \wedge d\bar{z}_1) \wedge \cdots \wedge (dz_n \wedge d\bar{z}_n)$ 是一个自然的被保持的定向。

2.2 子流形和子簇

定理 2.2.1 (反函数定理). 设 U, V 是 $\mathbb{C}^n$ 的开集，$0 \in U, f: U \to V$ 是全纯映射，并且 f 在 0 处的 *Jacobian*$(\partial f_i / \partial z_j)$ 非零。那么 f 在某个充分小的 0 的邻域上是全纯同构。

证明. 考虑它作为 $\mathbb{R}^{2n}$ 之间的映射知其 Jacobian 非零，于是由实数版本的反函数定理，f 在 0 附近有光滑反函数 f^{-1}。而 $f^{-1}(f(z)) = z$，于是：

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} f^{-1}(f(z)) = \left(\sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_k} + \sum_k \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial \bar{z}_k} \cdot \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial \bar{z}_k} \right)_j$$

于是可知以下矩阵乘积 $(\frac{\partial f^{-1}}{\partial z}) \cdot \overline{(\frac{\partial f}{\partial z})} = O$，由后者非奇异知前者为 0，从而 f^{-1} 全纯。 □

定理 2.2.2 (隐函数定理). 设 $f_1, \cdots, f_k \in \mathscr{O}_n$，且 $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0)\right)_{i,j} \neq 0$，那么存在 $w_1, \cdots, w_k \in \mathscr{O}_{n-k}$ 使得在某个 $0 \in \mathbb{C}^n$ 的邻域内：

$$f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0 \iff z_i = w_i(z_{k+1}, \cdots, z_n)(1 \leq i \leq k)$$

证明. 由通常的隐函数定理，只需证明构造出的 w 是全纯的。

同样，记 $z = (z_{k+1}, \cdots, z_n), k+1 \leq \alpha \leq n$：

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z_\alpha}} (f_j(w(z), z)) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z_\alpha}} f_j(w(z), z) + \sum \frac{\partial w_k}{\partial \bar{z_\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial w_k} f_j(w(z), z) + \sum \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial \bar{z_\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{w}_k} f_j(w(z), z) \\ &= \sum \frac{\partial w_k}{\partial \bar{z_\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial w_k} f_j(w(z), z) \end{aligned}$$

同样由非奇异性可以推出 $\frac{\partial w_i}{\partial \bar{z}_j} = 0$，得证。 □

接下来证明全纯映射的一个重要性质：

命题 2.2.3. 开集 $U, V \subseteq \mathbb{C}^n$，对于全纯双射 $f: U \to V$，其 *Jacobian* 行列式处处非零，于是 f^{-1} 也是全纯的。从而全纯双射和全纯同构是等价的。

证明. 对 n 归纳，$n = 1$ 的情况是显然的。设 U, V 上有坐标 $z_1, \cdots, z_n; w_1, \cdots, w_n$，如果 f 的 Jacobian 有秩 k，无妨 $(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(0))_{1 \leq i,j \leq k}$ 非奇异，那么由隐函数定理：

$$z_i' = f_i(z), (1 \leq i \leq k); z_j' = z_j, (k+1 \leq j \leq n)$$

是一个 0 附近的全纯坐标系。

现在 $f: U \to V$ 将 $z_1' = \cdots z_k' = 0$ 一一地映到 $w_1 = \cdots = w_k = 0$，并且 $f|_{z_1'=\cdots=z_k'=0}$ 的 Jacobian$(\partial f_\alpha/\partial z_\beta)$ 是奇异的（考虑上三角分块矩阵行列式）

因此由归纳假设，只能 $k=0$ 或 n，即只要 Jacobian 不满秩则一定为零矩阵。因此 f 将 $\det J(f)=0$ 的轨迹的每个连通分支映为若干单点。然而 f 是双射，并且 $\det J(f)=0$ 的轨迹的每个连通分支只要非空，就一定不是一个单点（非孤立点性）。因此由 f 是双射知这样的情况不会出现。从而说明了 Jacobian 处处满秩。 □

注记. 在实 C^∞ 映射情况下这个结果不成立：$t \to t^3$ 是双射但没有光滑的反函数。

定义 2.2.4 (子流形). 称复流形 M 的一个子流形 S 为 M 的一个子集满足以下两个条件之一：

1. S 在局部上可以表示成 k 个全纯函数 $f_1, \cdots, f_k$ 的公共零点，并且 $\det(\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}) \neq 0$

2.S 在局部上可以表示成开集 $U \subset \mathbb{C}^{n-k}$ 在映射 $f: U \to M$ 下的像，并且 $\operatorname{rank} J(f) = n-k$

这两个条件是等价的，因为隐函数定理 (定理 2.2.2)。

自然，这样的 S 有一个从 M 中继承的 $n-k$ 维复流形结构。

定义 2.2.5 (子解析簇). 复流形 M 的一个子解析簇是一个子集 V，并且它能够局部地表示为有限个全纯函数的零点集。

称 $p \in V$ 是光滑点，如果它局部上是一个子流形。i.e.V 在局部上是有 $f_1, \cdots, f_k$ 给出的，并且 $\det(\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}) \neq 0$。

全体光滑点构成的集合记为 V^*，$p \in V - V^*$ 中的点称为奇异点，奇异点集 $V_s = V - V^*$。

称 V 光滑（或非奇异）如果 $V = V^*$。

特别地，对于一个主解析集 $V \subset M$，我们可以定义一个点的阶数：$\mathrm{mult}_p(V)$ 定义为最大的 m 使得 f 的直至的 $m-1$ 阶任意混合偏导数为 0.

命题 2.2.6. 奇异点集 V_s 被一个非 V 的子解析簇包含。

命题 2.2.7. 解析簇 V 是不可约的 $\iff$ V^* 是连通的。

证明. □

最后再给出两个重要概念的定义。

定义 2.2.8 (解析簇的维数). 称不可约解析簇的维数为其光滑点集作为复流形的维数。如果一个解析簇的各个不可约解析簇的维数都相同（设为 k），那么定义它的维数也是 k。

定义 2.2.9 (切锥). 对于流形中的一个解析簇 V，定义 $T_p(V) \subset T_p'(M)$（全纯切空间），如果 V 是主解析集，其在 p 点处附近由全纯函数 f 决定。考虑 f 在 p 处的幂级数展开，将其按照齐次部分整理得到：$f(z_1, \cdots, z_n) = f_m(z_1, \cdots, z_n) + f_{m+1}(z_1, \cdots, z_n) + \cdots$

定义切锥为 $\{\sum \alpha_i \dfrac{\partial}{\partial z_i} | f_m(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0\}$。

对于一个一般的解析集和其上一点 p，考虑全部在 p 点局部上包含 V 的主解析集，它们的切锥的交定义为这个解析集在 p 处的切锥。

注记. 如果 V 在 p 处是光滑的，那么切锥自然就是作为 V 子流形的切空间。事实上，仿照微分几何的思路，切锥正是全体簇上的全纯的曲线 $[0,1]\to V$ 的切线的集合（考虑一个具有尖点的曲面，它的切锥正是一个圆锥）

类似前面定义的主解析集的阶数，定义一个一般的 k 维解析簇的阶数为第一章末尾中提及的覆叠的叶数。特别地，V 在 p 处光滑 $\iff mult_p(V)=1$。更一般的，如果 $W\subset V$ 是一个子簇，那么定义 $mult_W(V)$ 是将 W 取为一般情况点时的阶数。

注记. 上文中的一般情况 (generic cases) 是指所有例外情况的点构成的集合能被一个维数严格更小的解析簇包含。

2.3 De Rham 上同调和 Dolbeault 上同调

对于一个流形，其上实值微分形式以及微分算子自然诱导出了实值 De Rham 上同调群 $H^p_{dR}(M,\mathbb{R})$，对于复值微分形式，同样诱导出了 De Rham 上同调群 $H^p_{dR}(M)$，自然 $H^p_{dR}(M)\cong H^p_{dR}(M,\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$。

对于 n 阶外微分 $\bigwedge^n T^*_{\mathbb{C},z}(M)=\bigoplus_{p+q=n}\left(\bigwedge^p T^{*\prime}_{\mathbb{C},z}(M)\bigwedge^q T^{*\prime\prime}_{\mathbb{C},z}(M)\right)$，、、即 $A^n(M)=\bigoplus_{p+q=n}A^{(p,q)}(M)$。

正如之前指出的，$A^{p,q}(M)$ 中的元素称为流形上的 $(p,q)-$ 阶形式。其中 p 为全纯阶数，q 为反全纯阶数。对于外形式 $A^*(M)$ 中的元素，自然可以将其分离成若干 $(p,q)-$ 阶形式的和：$\varphi=\sum\pi_{p,q}(\varphi)$。

现在考虑一个 (p,q) 形式 φ，外微分算子 d 作用在 φ 上得到了一个 $A^{(p+1,q)}\oplus A^{(p,q+1)}$ 中的像。

现在我们定义两个算子：

$\partial:A^{p,q}\to A^{p+1,q}:\varphi\mapsto\pi^{(p+1,q)}\circ d(\varphi)$；$\bar\partial:A^{p,q}\to A^{p,q+1}:\varphi\mapsto\pi^{(p,q+1)}\circ d(\varphi)$，于是 $d=\partial+\bar\partial$。

对于一个局部坐标系统，其上的 $(p,q)-$ 阶形式 $\varphi=\sum\limits_{|I|=p,|J|=q}\varphi_{IJ}(z)dz_I\wedge d\bar z_J$，上述两个算子作用后的结果为：

$$\bar\partial\varphi=\sum_{I,J,i}\frac{\partial}{\partial\bar z_i}\varphi d\bar z_i\wedge dz_I\wedge d\bar z_J$$

$$\partial\varphi=\sum_{I,J,i}\frac{\partial}{\partial z_i}\varphi dz_i\wedge dz_I\wedge d\bar z_J$$

特别地，称 $(p,0)-$ 形式为全纯的如果 $\bar\partial\varphi=0$。如果 $\varphi=\sum_{|I|=p}\phi_I dz_I$，那么它全纯 $\iff \phi_I$ 均为全纯的。

即：全纯 p 形式是指各分量都全纯的 $(p,0)$ 形式。

现在考虑流形 M,N 间的映射 $f:M\to N$，如果它是全纯的，那么 f^* 保持全纯切空间和反全纯切空间，因此 $f^*(A^{p,q}(N))\subseteq A^{p,q}(M)$，注意对于余切空间这是反变的；并且 $\bar\partial\circ f^*=f^*\circ\bar\partial$。

命题 2.3.1. $\bar\partial^2=0$

证明. 注意对于 $(p,q)-$ 形式 φ，$\bar\partial^2\varphi$ 是 $d^2\varphi$ 的 $(p,q+2)-$ 分量，然而 $d^2=0$，于是结论得证。 □

定义 2.3.2 (Dolbeault 上同调).

由于命题 2.3.1，我们有链复形 $\cdots \to A^{p,q-1}(M) \to A^{p,q}(M) \to A^{p,q+1}(M) \to \cdots$，于是可以定义 Dolbeault 上同调群 $H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$。正如之前讨论的，流形之间的映射可以诱导出上同调群反方向的映射。

定理 2.3.3 ($\bar\partial-$Poincare 引理：局部零调). *对于 $\mathbb{C}^n$ 中的多圆盘 $\Delta = \Delta(r)$，$H^{p,q}_{\bar\partial}(\Delta) = 0 \quad q \geq 1$*

证明. 见 [Har94, Page 25]。 □

2.4 复流形上的微积分

定义 2.4.1 (流形上的 Hermitian 度量). 对于 n 维复流形 M，其上的 Hermitian 度量正是其全纯切空间上的 Hermitian 内积：

$$(\ , \ )_z : T'_z(M) \otimes \overline{T'_z(M)} \to \mathbb{C}$$

并且其在局部坐标下的表示是光滑的。

自然，这样的内积可以用 $T^{*\prime}(M) \otimes T^{*\prime\prime}(M)$ 中的元素表示，即一个内积实际上是一个 2 阶张量 $ds^2 = \sum_{i,j} h_{ij}(z) dz_i \wedge d\bar z_j$。自然的我们会考虑余标架 $ds^2 = \sum_i \varphi_i \otimes \bar\varphi_i$。因此可以通过 w.r.t. 内积的 Schmidt 正交化方法局部地求出这样的一组余标架，即局部余标架总是存在的。（事实上这就是对矩阵 $\{h_{ij}\}$ 做合同对角化，合同对角化与 w.r.t. 二次型诱导的内积的正交化实际上是一回事）

注意我们有 $T_{\mathbb{R},z}(M) \to T'_z(M)$ 的自然 $\mathbb{R}$- 线性空间同构：

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mapsto \frac{\partial}{\partial z_i} \quad \frac{\partial}{\partial y_i} \mapsto \sqrt{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_i}$$

因此 Hermitian 度量诱导出了一个 Riemann 度量：

$$\mathrm{Re}\ ds^2 : T_{\mathbb{R},z}(M) \otimes T_{\mathbb{R},z}(M) \to T'_z(M) \otimes \overline{T'_z(M)} \to \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

同样地，考虑虚部则得到了一个实的 2 形式：

$$\mathrm{Im}\ ds^2 : T_{\mathbb{R},z}(M) \otimes T_{\mathbb{R},z}(M) \to T'_z(M) \otimes \overline{T'_z(M)} \to \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

用余标架的方式计算，设 $\varphi_i = \alpha_i + \sqrt{-1}\beta_i$，那么计算可知 $\mathrm{Re}\ ds^2 = \sum(\alpha_i \otimes \alpha_i + \beta_i \otimes \beta_i)$。以及实的 2 形式诱导出的 $(1,1)-$ 形式：$\omega = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\ ds^2 = \sum \alpha_i \wedge \beta_i = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum \varphi_i \wedge \bar\varphi_i$。

由定义，这个微分形式其实正是 ds^2 在反对称化子作用下的结果（需要调整一些系数）。因此对于一般形式的 $ds^2 = \sum h_{ij} dz_i \otimes d\bar z_j$，其关联的 $(1,1)-$ 形式正是 $\frac{\sqrt{-1}}{2} \sum h_i j dz_i \wedge d\bar z_j$。

现在我们知道了任何实系数的 $(1,1)-$ 形式都能够诱导出一个 Hermitian 形式。如果系数矩阵 $\{h_{ij}\}$ 是正定 Hermitian 阵的话就能够进一步诱导出了正定的 Hermitian 度量。这样的 $(1,1)-$ 形式被称为正定的 $(1,1)-$ 形式。

接下来我们考虑 Hermitian 度量的拉回。对于全纯映射 $f: N \to M$，诱导的切映射 $f_*: T'(N) \to T'(M)$ 是单射，以及 M 上的 Hermitian 度量，那么这诱导出了 N 上的 Hermitian 度量：$(m,n) := (f_*m, f_*n)$。

另一方面，Hermitian 度量实际上由一个 $(1,1)-$ 形式 ω 决定的，利用 f^* 和外积运算的交换性立刻得到：M 上的 Hermitian 度量对应的 $(1,1)-$ 形式 ω_M 的拉回 $\omega_N = f^*(\omega_M)$ 正是诱导出的 N 上的 Hermitian 度量对应的 $(1,1)-$ 形式。

例子. *1.*$\mathbb{C}^n$ *上的* $ds^2 = \sum dz_i \otimes d\bar{z}_i$ *正是标准 Hermitian 内积。*

2. 复环面 $\mathbb{C}/\Lambda$ *同理也有一个与 1. 相同的度量。*

3. 对于 $\mathbb{C}P^n$ *的齐次坐标* $Z = (z_0, \cdots, z_n)$*，考虑* $\omega = \dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log||Z||^2$*。*

首先说明良定义性，如果 $Z' = f \cdot Z$*，*f *是非零全纯函数。那么产生的差值不过是* $\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}(\partial\bar{\partial}\log f + \partial\bar{\partial}\log \bar{f}) = 0$ *(Note that* $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$*)*

注意 $U(n+1)$ *传递地作用在* $\mathbb{C}P^n$ *上，并且保持* ω *正定性，那么只需考虑一点的情况。无妨考虑坐标卡* $z_0 \neq 0, w_i = z_i/z_n$*。经计算在* $[1, 0, \cdots, 0]$ *处它是正定的，于是处处正定。*

因此由前述讨论，这诱导了 $\mathbb{C}P^n$ *上的 Hermitian 度量，称为 Fubini-Study 度量。*

对于一个复流形和局部坐标 $(z_1, \cdots, z_n)$，Hermitian 度量 $ds^2 = \sum \varphi_i \otimes \bar{\varphi}_i, \varphi_i = \alpha_i + \sqrt{-1}\beta_i$，以及关联的 $(1,1)-$ 形式 ω。

考虑 Riemann 度量 $\mathrm{Re}\, ds^2$ 诱导的体积元 $d\mu = \alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \beta_n$，另一方面 $\omega = \sum \alpha_i \wedge \beta_i$，于是 $\wedge^n \omega = n! \cdot d\mu$。

另一方面，前文关于度量的拉回表明了对于一个 d 维子流形 $S \subset M$，ds^2 在其上诱导的度量关联的 $(1,1)-$ 形式正是 $\omega|_S$，将上文的讨论运用在 $\omega|_S$ 上我们有：

定理 2.4.2 (Wirtinger 定理)**.** *对于* d *维子流形* $S \subset M$*，*$vol(S) = \dfrac{1}{d!}\displaystyle\int_S \omega^d$

现在我们考虑复流形中解析簇上的积分，我们定义 $\displaystyle\int_V \varphi = \int_{V^*} \varphi$。

命题 2.4.3 (解析簇的局部有限体积)**.** *V^* 在一个有界且紧的区域内的体积（体积元在其上的积分）是有限的。*

证明. 由紧性我们只需证明 $V \subset \mathbb{C}^n$ 的情况，由余标架的存在性当然总可以假设这里 $\mathbb{C}^n$ 上的度量是 Euclidean 的。设 V 是 k 维的，适当选择坐标使得 □

定理 2.4.4 (解析簇的 Stokes 定理)**.** *M 是复流形，V 是维数为 k 的解析簇，φ 是 $2k-1$ 次（复值）外微分式，并且在 M 上的支撑是紧的，那么*

$$\int_V d\varphi = 0$$

定理 2.4.5 (Remmert's proper mapping theorem)**.** *U, N 是复流形，全纯映射 $f: U \to N$，$M \subset U$ 是解析簇。如果 $f|_M$ 是逆紧的 (proper map)，那么 $f(M)$ 是 N 中的解析簇。*

第三章 层和层上同调

3.1 层

3.1.1 定义与例

定义 3.1.1 (预层和层). 预层是拓扑空间 X 的开集范畴到一个神秘范畴（通常是 Abel 群范畴或者交换环范畴，有时也许是集合范畴）的反变函子：$\mathscr{F}:\mathfrak{U}^{op}\to \mathrm{A}$。

进一步地，如果预层 $\mathscr{F}$ 还满足：

1. 对于任意指标集 I，以及任意一族开集 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$，如果对于一族 $\sigma_\alpha\in\mathscr{F}(U_\alpha)$，满足任意 $i,j\in I$，$\sigma_\alpha|_{U_i\cap U_j}$ 对所有的 $\alpha\in I$ 都相同：那么存在 $\rho\in\mathscr{F}(\cup_{\alpha\in I}U_\alpha)$ 使得 $\forall\alpha\in I,\rho|_{U_\alpha}=\sigma_\alpha$。

2. 对于任意指标集 I，任意一族开集 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$，如果 $\sigma\in\mathscr{F}(\cup_{\alpha\in I}U_\alpha)$ 满足对于任意 $\alpha\in I,\sigma|_{U_\alpha}=0$，那么 $\sigma=0$。

那么称 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间上的层。

定义 3.1.2 (茎). 对于一个预层 $\mathscr{F}$，定义其在 $p\in X$ 处的茎 $\mathscr{F}_p$ 为余极限 $\varinjlim_{U\ni p}\mathscr{F}(U)$，在接下来的例子中很容易看到它与之前提及的某点处的函数芽实质上一样。

例子. *1. 对于光滑流形 M，定义如下层：*

$\mathscr{C}^\infty(U)=U$ 上全体光滑函数构成的交换环/*Abel* 群：光滑函数层

$\mathscr{C}^*(U)=U$ 上全体非零光滑函数在乘法下构成的 *Abel* 群：光滑函数的乘法群层

$\mathscr{A}^p(U)=U$ 上（实值）光滑 p 形式构成的交换环/*Abel* 群：p 形式层

$\mathscr{Z}^p(U)=U$ 上全体 $d-$ 闭的（实值）光滑 p 形式构成的交换环/*Abel* 群：闭 p 形式层

$S(U)=U$ 上的全体连续函数 $f:U\to S$（其中 S 上携带离散拓扑）构成的交换环/*Abel* 群：$S-$ 常值层

2. 对于复流形 M，定义如下层：

$\mathscr{O}(U)=U$ 上全体全纯函数构成的交换环/*Abel* 群：全纯函数层

$\mathscr{O}^*(U)=U$ 上全体非零全纯函数在乘法下构成的 *Abel* 群：全纯函数的乘法群层

$\Omega^p(U)=U$ 上全体全纯 p 形式：全纯 p 形式层

$\mathscr{A}^{(p,q)}(U)=U$ 上全体 $C^\infty-(p,q)-$ 阶形式：(p,q) 形式层

$\mathscr{Z}_{\bar\partial}(U)=U$ 上全体 $\bar\partial-$ 闭的 (p,q) 形式：$\bar\partial-$ 闭 p 形式层

$\mathscr{I}_V(U)=U$ 上全体在 $U\cap V$ 上消失的全纯函数：V 消失全纯函数层

$\mathscr{O}(E)(U)=E$ 在 U 上的全纯截面：E 的全纯截面层

$\mathscr{A}^{(p,q)}(E)(U)=U$ 上全体 $E-$ 取值（C^∞）(p,q) 形式层：$E-$ 取值 (p,q) 形式层

3. 对于复流形 M，其上的亚纯函数定义为局部可写成全纯函数之比的“形式”函数：给定某个开覆盖 U_α，$f|_{U_\alpha}=g_\alpha/h_\alpha$，并且在 $\mathscr{O}(U_\alpha\cap U_\beta)$ 中有 $g_\alpha h_\beta=g_\beta h_\alpha$。于是可以定义复流形

M 上的亚纯函数层 $\mathscr{M}$，自然也有乘法群层 $\mathscr{M}^*$

注记. 关于 V 消失全纯函数层，可以将这个思路推广：对于子空间 $M \subseteq N$ 以及 M 上的层 $\mathscr{F}(M)$，可以将层延拓至 N 上：

$$\tilde{\mathscr{F}}(U) = \mathscr{F}(U \cap M)$$

容易验证 $\tilde{\mathscr{F}}$ 的确是一个层。

定义 3.1.3 (预层的态射). 预层 $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 间态射定义为一族同态 $\{\alpha_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)\}_{U \cap M}$，使得对于任何 $U \cap V$，α_U, α_V 在限制映射下交换，即正是函子 $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ 间的自然变换。

层的态射定义相同。

3.1.2 层化与平展层

我们选取的神秘范畴通常是一个 Abel 范畴 A,层的态射的定义指出所有 X 上的 A− 取值的层构成了一个范畴,它是预层范畴的全子范畴。注意预层范畴实际上就是函子范畴 $Func(\mathfrak{U}^{op}, \mathrm{A})$，当 A 是 Abel 范畴时它自然是 Abel 范畴。现在自然想问层范畴是否也是 Abel 的。

经过一些常规的检验，可以发现只需要指出层之间的态射的核和余核即可。前者是比较容易的（直接定义为 $\ker\alpha(U) = \ker\alpha_U$，然而后者如果按照类似方式定义得到的不一定是层，通常情况下它仅仅是一个预层。

因此这就引出了如何从一个预层自然地（并且 universally）构造出一个层，并且保持住茎。这是相当重要的，因为一般情况下预层相当容易构造，并且很多时候我们构造出的预层并不是层。这就是如下的层化问题：

命题 3.1.4 (层化). *对于一个预层 $\mathscr{F}$，选出一个层 $\mathscr{F}^+$，以及一个态射 $\theta : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$。使得对于任何层 $\mathscr{G}$，态射 $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，存在唯一态射 $\psi : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$，使得 $\varphi = \psi \circ \theta$。*

预层的层化构造需要利用平展空间，为了方便理解我们从更一般的原层出发。接下来的构造源自 [Rot09]。

首先我们承认 Freyd-Mitchell 嵌入：对于任何 Abel 范畴 A，存在一个全忠实的正合函子 $A \to R$-**Mod**（对某个交换环 R 成立），因此接下来无妨假定预层 $\mathscr{F}$ 是在某个 R- 模上取值的。

最后还需要指出，我们应当假定 $\mathscr{F}(\varnothing)$ 为 Abel 范畴中的零对象，这也是经常遇到的情况。

定义 3.1.5 (原层). 称 (E, p, X) 为一个原层，如果满的连续映射 $p : E \to X$，使得对于任何 $e \in E$，存在 e 的邻域 S 使得 $p(S)$ 在 X 中开，并且 $p|_S$ 是同胚。

此时 E 称为层空间，X 称为底空间，p 为投影映射，$p^{-1}(x)$ 为 x 处的茎，记为 E_x。

注记. 很容易验证对于任何开集 $U \subseteq X$，Y 是任一拓扑空间，$f : U \to Y$（可以是连续映射，也可以不是）一定能按层的两条公理的形式进行粘合。（i.e.$f|_{U_i} = g|_{U_i} \implies f = g; f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \implies \exists f\ on\ U$）

事实上，如果取开集的像为：开集上全体满足某些性质的映射构成的某个结构，这样定义的预层都一定是层（因为它们作为函数自然可以验证层公理）。

现在我们将 Abel 范畴（或 R- 模代数结构）引入原层，就得到了平展层：

定义 3.1.6 (平展层). 一个原层 $\mathcal{S}=(E,p,X)$ 是 R- 模平展层，如果每个茎 E_x 都可以被赋予一个 R- 模结构，并且一切运算都是连续的。对于两个平展层 $(E,p,X),(E',p',X)$，其间的平展映射 φ 被定义为连续映射 $\varphi:E\to E'$，使得 $p'\varphi=p$（保持茎），并且 $\varphi|_{E_x}$ 是同态（Abel 范畴中的态射/R- 模同态/环同态/Abel 群同态 etc.）

容易验证全体某个固定拓扑空间 X 上的 R- 模平展层在上述定义的平展映射作为态射下构成了一个范畴，记为 $\mathbf{Sh}_{et}(X,R\text{-}\mathbf{Mod})$。

定义 3.1.7 (截面). 对于一个平展层 $\mathcal{S}=(E,p,X)$，定义开集 $U\subseteq X$ 上的截面为连续映射 $s:U\to E$ 使得 $p\circ s=1_U$，记全体 U 的截面为 $\Gamma(U,\mathcal{S})$，特别地，定义空集的情况为 $\Gamma(\varnothing,\mathcal{S})=\{0\}$

现在我们可以发现 $\Gamma(-,\mathcal{S})$ 是一个 R- 模取值的层。（预层只需一些简单的验证，它是层的原因正是注记3.1.2中提到的）

因此 $\Gamma:\mathbf{Sh}_{et}(X,R\text{-}\mathbf{Mod})\to\mathbf{pSh}(X,R\text{-}\mathbf{Mod})$ 是一个函子。并且 $Im(\Gamma)\subseteq\mathbf{Sh}(X,R\text{-}\mathbf{Mod})$

现在给出预层 $\mathscr{F}$ 的层化，首先取出相伴平展层 $\mathscr{F}^{et}=(E^{et},\pi,X)$，其中 $E^{et}=\coprod_{x\in X}\mathscr{F}_x$，$\pi$ 为自然的投影，E^{et} 上赋予的拓扑如下：

$$<U,\sigma>=\{(x,\sigma_x)|x\in U,\sigma_x=\rho_U^x(\sigma)\},\sigma\in\mathscr{F}(U)$$

由如上拓扑基生成的拓扑，其中 $\rho_U^x:\mathscr{F}(U)\to\varinjlim_{U\ni x}\mathscr{F}(U)$ 为自然的映射。

命题 3.1.8. *$F^{et}=(E^{et},\pi,X)$ 是一个平展层。*

证明. 对于 $s_x\in E$，它一定是某个 $\sigma\in\mathscr{F}(U)$ 的像，考虑开集 $<U,\sigma>$，自然它包含 s_x，并且显然和 u 同胚，于是立刻验证其为原层。

由定义立刻有它是平展层。 □

这一过程实际上是一个函子 $\Phi:\mathbf{pSh}(X,R\text{-}\mathbf{Mod})\to\mathbf{Sh}_{et}(X,R\text{-}\mathbf{Mod})$，并且 $\Gamma\Phi:\mathbf{pSh}(X,R\text{-}\mathbf{Mod})\to\mathbf{pSh}(X,R\text{-}\mathbf{Mod})$ 事实上与 $1_{\mathbf{pSh}}(X,R\text{-}\mathbf{Mod})$（限制到 $\mathbf{Sh}(X,R\text{-}\mathbf{Mod})$ 时）是自然同构，对于一般情况则为一个自然变换 $\mathscr{F}\to\Gamma\Phi\mathscr{F}$。

因此将 Φ 限制到 $\mathbf{Sh}(X,R\text{-}\mathbf{Mod})$ 就有范畴等价：$\mathbf{Sh}(X,R\text{-}\mathbf{Mod})\cong\mathbf{Sh}_{et}(X,R\text{-}\mathbf{Mod})$

因此从预层 $\mathscr{F}$ 出发，先取相伴平展层 $\mathscr{F}^{et}$，再取截面层就得到了 $\mathscr{F}^+$。它的确保持茎，并且它满足层化问题命题 3.1.4的条件。

定理 3.1.9. *对于预层 $\mathscr{F}$，$\mathscr{F}^+=\Gamma\Phi\mathscr{F}$ 是层，保持茎，并且是 $\mathscr{F}$ 的层化。*

层化的正向极限构造

最后我们要指出，Abel 群层/环层/模层（于是由嵌入定理，自然对于所有的 Abel 层）的层化有一个更简单的表述方式。这个表述远比平展层的表述简单，因此也具有更广泛的应用范围。（一般情况下平展层是很难运用的）

记

$$C(U,\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I})=\{(\sigma_\alpha)_{\alpha\in I}\mid\bigcup U_\alpha=X,\sigma_\alpha\in\mathscr{F}(U_\alpha\cap U),\sigma_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}=\sigma_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta},\forall\alpha,\beta\in I\}$$

当然这里 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 X 的一组开覆盖。仿照后文对 Cech 上同调的讨论，我们定义

$$\mathscr{F}^+(U)=\varinjlim_{\mathcal{U}} C(U,\mathcal{U})$$

这里正向极限的定义如下：对于 $\mathcal{U}$ 以及加细的覆盖 $\mathcal{V}$，对于 V_α，定义 $C(U,\mathcal{U})$ 的某个元素在 $C(U,\mathcal{V})$ 像 (i.e. 这个 direct system 的态射）的 V_α 分量为 $\sigma|_{V_\alpha}$。其中 σ 为 $\mathscr{F}^+(U)$ 的元素的 U_α 分量，其中 $V_\alpha\subseteq U_\alpha$。利用 C 的定义很容易知道这与 U_α 的选择无关，因此良定义。

很显然每个 $\mathscr{F}^+(U)$ 都是 Abel 群/环/模。

$\mathscr{F}^+$ **是预层**。

我们只需考虑正向系统的态射，亦即说明如下图交换：

$$\begin{tikzcd}
C(U,\mathcal{U}) \arrow[r] \arrow[d] & C(U,\mathcal{V}) \arrow[d] \\
C(V,\mathcal{U}) \arrow[r] & C(V,\mathcal{V})
\end{tikzcd}$$

容易验证这是简单的，于是取正向极限就得到了态射 $\mathscr{F}^+(U)\to\mathscr{F}^+(V)$：注意这是 Direct system 上的极限。

$\mathscr{F}^+$ **是层**。

这是可以直接了当地验证的。

$\mathscr{F}^+$ **满足层化要求的泛性质**。

对于每个开集 U，我们有图表

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{F}_{(pSh)}(U) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr] & & \mathscr{G}_{(Sh)}(U) \\
C(U,\mathcal{U}) \arrow[d] & \cdots & C(U,\mathcal{V}) \arrow[d] & \\
C'(U,\mathcal{U}) \arrow[dr, dashed] \arrow[rrruu, bend right] & \cdots & C'(U,\mathcal{V}) \arrow[ruu] \arrow[dl, dashed] & \\
& \mathscr{F}^+(U) \arrow[rruuu, dashed, bend right, "\exists!"'] & &
\end{tikzcd}$$

其中 C' 是 C 的类似定义，只不过将 $\mathscr{F}$ 换成 $\mathscr{G}$，态射也是自然的。$\mathscr{G}$ 是层保证可以将 C' 的一个元素还原回层的元素。那么由正向极限的泛性质就得到了结果。另一方面，这个图表对于 U 是自然的，i.e. 对于任何 $U\to V$，诱导出的两份这样的图表之间交换，因而可以提升为预层的态射。而这就是要证明的结果。

下面回顾亚纯函数的定义：那里的定义实际上是不严谨的，因为不同的开覆盖和 f/g 实际上有可能指的是同一个亚纯函数（这在直观上确实成立）。简单的思考可以知道这里用的正是正向极限的定义，因此我们可以修改亚纯函数的定义如下。

定义 3.1.10 (亚纯函数层)**.** 考虑预层 $U\mapsto Frac(\mathscr{O}(U))$（唯一性定理同样也能说明 $\mathscr{O}(U)$ 是整环），其层化称为复流形的亚纯函数，其全局截面的一个元素称为 X 上的一个亚纯函数。

3.1.3 层的正合列

现在终于可以定义层态射的核和余核了，余核的定义正是预层 $U \mapsto \operatorname{coker} \alpha_U$ 的层化。因此可以验证层范畴 $\mathbf{Sh}(X, \mathcal{A})$ 的确也是一个 Abel 范畴。接下来，保持假定层是 R-$\mathbf{Mod}$ 取值的。

于是现在可以谈论层的正合列：$0 \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to 0$。注意一般情况下，层的正合并不意味着 $\mathscr{F}(U)$ 对应的列是正合的（因为余核的定义）

尽管如此，如下性质保证了有一个较为简单的判别层正合性的方法。

定理 3.1.11. *$\mathscr{F}, \mathscr{F}'$ 都是 $\mathscr{G}$ 的子层，那么 $\mathscr{F} = \mathscr{F}' \iff \forall x \in X, \mathscr{F}_x = \mathscr{F}'_x$。*

证明. 只需证 $\Longleftarrow$ 方向，首先两个平展层的子平展层相同当且仅当茎相同：因为嵌入的平展映射已经自带了。

其次若给定层 $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$，考虑嵌入态射 $\iota : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 在函子 Φ 下的像：$\Phi(\iota) : \Phi\mathscr{F} \to \Phi\mathscr{G}$。由于对于每个 U，$\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ 是单射，同时茎的正向极限的指标集是 Directed Set，从而保持正合，于是 $\mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ 也是单射。因此由 Φ 的定义，自然就有了嵌入的平展态射 $\Phi(\iota)$ 依然是嵌入。

结合两者可知对于 $\mathscr{G}$ 的子层 $\mathscr{F}, \mathscr{F}'$，其相伴平展层 $\Phi(\mathscr{F}) = \Phi(\mathscr{F}')$。

然而函子 Φ 是单的，因为只要预层不同，必然存在一点处的的茎（正向极限）不同。（为什么？）

于是 $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$。 □

定理 3.1.12. *层序列*

$$\mathscr{E} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F} \xrightarrow{\beta} \mathscr{G}$$

是正合的当且仅当：

$$\mathscr{E}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathscr{F}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathscr{G}_x \quad \forall x \in X$$

是正合的。

证明.

$\Longrightarrow$. $(\ker \beta)_x = (\operatorname{Im} \alpha)_x$，但是回忆核与余核（像）的定义，注意平展化函子 Φ 保持茎，即 $\ker \beta_x = (\ker \beta)_x, \operatorname{Im} \alpha_x = (\operatorname{Im} \alpha)_x$，因此得到结果。

$\Longleftarrow$. 注意 $\ker \beta$ 和 $\operatorname{Im} \alpha$ 都可以实现为 $\mathscr{F}$ 的子层，那么由定理 3.1.11得到结果。 □

例子.

1. 在复流形 M 上 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathscr{O} \xrightarrow{exp} \mathscr{O}^* \to 0$ 是正合的，其中 $exp : f \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}f}$
2. 子复流形 $V \subseteq M$ 上的全纯函数层 $\mathscr{O}_V$ 由前文提及的延拓可以视作 M 上的层，那么有：$0 \to \mathscr{I}_V \to \mathscr{O}_M \to \mathscr{O}_V \to 0$ 是正合的。

3. 由实流形局部零调（Poincare 引理），在任何实流形 M 上 $0 \to \mathbb{R} \to \mathscr{A}^0 (= \mathscr{C}^\infty) \xrightarrow{d} \mathscr{A}^1 \xrightarrow{d} \cdots$ 是正合的。因此将要看到 De Rham 上同调不过是常值层 $\mathbb{R}$ 在整体截面函子 $\Gamma(-)$ 下在此消解下的导出。

4. 由复流形局部零调（$\bar{\partial}$-Poincare 引理），在任何复流形 M 上
$0 \to \Omega^p \to \mathscr{A}^{(p,0)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{A}^{(p,1)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots$ 是正合的。因此将要看到 Dolbeault 上同调不过是全纯 p 形式层在整体截面函子 $\Gamma(-)$ 下在此消解下的导出。

3.2 层上同调

3.2.1 层上同调

定理 3.2.1. *对于具有足够内射对象和在积下封闭的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$，拓扑空间 X，$\mathbf{Sh}(X,\mathcal{A})$（由 3.1.2 是 Abel 范畴）具有足够内射对象。*

注记. 多数情况唯一的投射层是 0

证明. 考虑摩天大厦层

$$(x_*A)(U)=\begin{cases}A & x\in U\\ \{0\} & otherwise.\end{cases}$$

其中 $A\in Obj(\mathcal{A})$。

由层的态射定义容易验证 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-_x,A)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}}(-,x_*A)$（$\mathbf{Sh}(X,\mathcal{A})\to\mathbf{Ab}$ 的函子）是自然同构的。因此如果 A 是内射对象，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-_x,A)$ 是正合的，于是 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}}(-,x_*A)$ 也是，于是 x_*A 是内射对象。从而对于一族内射对象 A_x，$\prod_{x\in X}x_*A$ 也是内射对象。

现在对于任何一个层 $\mathscr{F}$，对于每个 $x\in X$，由 $\mathcal{A}$ 中内射对象足够，知存在内射对象 $A_x\in Obj(\mathcal{A})$ 单态射 $\lambda_x:\mathscr{F}_x\to A_x$。

对这些同态求积得到了 $\lambda:\prod_{x\in X}(x_*\mathscr{F}_x)\to\prod_{x\in X}(x_*A_x)$。但是另一方面，存在一个层态射 $\phi:\mathscr{F}\to x_*\mathscr{F}_x$ 并且在 x 处的茎诱导的态射是恒等态射。（直接构造即可）因此，由积的泛性质，得到了态射 $\theta:\mathscr{F}\to\prod_{x\in X}(x_*\mathscr{F}_x)$。

那么考虑复合映射 $\lambda\theta:\mathscr{F}\to\prod_{x\in X}(x_*A_x)$ 是单的：回想层中 ker 的定义只需检验茎处情况，但是 θ_x 是恒等态射，λ_x 是单态射，于是 $\lambda\theta$ 是单态射。并且前文已经说明 $\prod_{x\in X}(x_*A_x)$ 是内射对象，从而得证。 □

注记. 事实上，可以仿照此过程证明，对于环化空间 $(X,\mathscr{O}_X)$，模层 $\mathbf{Sh}(X,\mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod})$ 中有足够内射对象，（前提是承认 $R-\mathbf{Mod}$ 范畴中有足够内射对象）。参见 [Har77, page 207, prop 2.1]。

注记 (溪酱). 溪酱可爱捏:)

现在由于 $\mathbf{Sh}(X,\mathbf{Ab})$ 中有充足内射对象，并且整体截面函子 $\Gamma(-,X):\mathbf{Sh}(X)\to\mathbf{Ab}$ 是左正合的（回忆 ker 的定义），自然可以定义其右导出。

定义 3.2.2 (层上同调)**.** 对于层 $\mathscr{F}$，定义其第 $q\geq 0$ 个上同调为其右导出函子 $(R^q\Gamma)(\mathscr{F})$，记为 $H^q(X,\mathscr{F})$

具体来说，$R^q\Gamma$ 是取 $\mathscr{F}$ 的内射消解 $0\to\mathscr{F}\to E_0\to E_1\to\cdots$ 令整体截面函子作用其上，得到链复形 $0\to\Gamma(E_0)\to\Gamma(E_1)\to\cdots$，那么 $R^q\Gamma$ 是上述链复形在 $\Gamma(E_q)$ 处的上同调。

注记. 熟知的同调代数结果指出上述定义与内射消解的选取无关 [Rot09, page 365, prop 6.40]。

自然的问题是如何计算层上同调，一般情况下内射消解并不总是很容易取出，即使取出也不一定便于计算。接下来的结果指出在计算上同调时可以选取范围更广的一些消解。

定义 3.2.3 (Acyclic)**.** 称拓扑空间 X 上的层 $\mathscr{L}$ 是 $F-$acyclic（无环）的，如果 $\forall q\geq 1, H^q(\mathscr{L})=0$，其中 $F:\mathbf{Sh}(X,\mathbf{Ab})\to\mathbf{Ab}$ 是左正合的加性函子。

Acylic 对象如此重要是因为如下重要结果。

定理 3.2.4. *对于层 $\mathscr{F}$ 的 $F-acyclic$ 消解 $0 \to \mathscr{F} \to A_0 \to \cdots$，有*

$$(R^iF)(\mathscr{F}) = H^i(F(A_*))$$

即可以通过 acyclic 消解计算导出函子。

证明. 对 i 归纳，$i = 0$ 时是简单的，因为它们都是 $F(\mathscr{F})$。

假定 $i \geq 2$，考虑 $0 \to \mathscr{F} \to A_0 \to X \to 0$，由导出函子长正合列定理（它的证明是利用马蹄引理构造出链复形的正合列 [Rot09, page 349, prop 6.24]，左（右）正合函子作用在直和上仍然保持直和，然后使用通常的长正合列定理即可）有正合列：

$$\to (R^{i-1}F)(A_0) \to (R^{i-1}F)(X) \to (R^iF)(\mathscr{F}) \to (R^iF)(A_0) \to$$

由于 A_0 是 acyclic 的，那么 $(R^iF)(\mathscr{F}) \cong (R^{i-1}F)(X)$。

因此这将问题转化为了 $0 \to X \to A_1 \to \cdots$ 中的第 $i-1$ 个导出。于是只需证明 $i = 1$ 的情况。

然而此时长正合列变为 $F(A_0) \to F(X) \to (R^1F)(\mathscr{F}) \to 0$,因此 $(R^1F)(\mathscr{F}) = \operatorname{coker}\{F(A_0) \to F(X)\}$。

然而

$$H^1(F(A_*)) = \ker\{F(A_1) \to F(A_2)\}/\operatorname{Im}\{F(A_0) \to F(A_1)\} = \frac{F(\ker\{A_1 \to A_2\})}{\operatorname{Im}\{F(A_0) \to F(X)\}}$$

（A_1 换为 X 是因为单态射 $A_1 \to X$ 诱导了单态射 $F(A_1) \to F(X)$）

$$= F(\operatorname{Im}\{A_0 \to A_1\})/\operatorname{Im}\{F(A_0) \to F(X)\}$$

$$= F(X)/\operatorname{Im}\{F(A_0) \to F(X)\} = \operatorname{coker}\{F(A_0) \to F(X)\} = (R^1F)(\mathscr{F})$$

□

注记. 这一结果的证明使用了称为 dimension shifting 的技巧。它在许多类似命题中都有出现，比如如下更为一般的结果。

定理 3.2.5. *设 $F^n, F'^n (n \geq 0): \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一列加性函子，$\mathcal{A}$ 中有足够的 $Y-$ 类对象（Y 是 A 中对象的子类，对象足够自然是指自然（满足交换性）的嵌入 $0 \to A \to E \in Y$ 总存在）*

如果：

1. 对于每个短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$，$F^n, F'^n$ 分别诱导出了长正合列，其中连接同态是自然的（具有函子性/满足交换性的）

2.F^0, F'^0 自然同构

3. 对于所有 $Y-$ 类对象 E，都有 $F^n(E) = F'^n(E) = 0, \forall n \geq 1$

那么 F^n, F'^n 自然同构，$\forall n \geq 0$。

此定理的证明当然是与之前几乎相同的,对于任何对象取消解的短正合列,然后按定理 3.2.4照猫画虎。然而此定理相当强力，它能够帮助断言一些（用其他方式定义的）函子只要满足某些条件其实就是层上同调函子（或一些感兴趣的函子）。在这里提及层上同调是因为层上同调函子能够很轻松地满足定理的条件，我们将在 Cech 上同调的内容里看到此定理的威力。

回到 acyclic 对象，定理 3.2.4提供了计算层上同调的方法：取 $\Gamma-$acyclic 消解，然而后进行计算。这是相当强力的，因为 acyclic 对象相当广泛。事实上，内射对象都是 $F-$acyclic 的（取平凡的内射消解即知其上同调均为 0）。

Flasque 层

一类重要的 acyclic 层（在谈论层的 acyclic 时，一般指 $\Gamma-$acyclic）是 flasque 层（松软层）。

定义 3.2.6 (Flasque 层)**.** 称 X 上的层 $\mathscr{L}$ 是 flasque 层，如果对于任何开集 $U \subseteq X$，限制映射 $\mathscr{L}(X) \to \mathscr{L}(U)$ 是满射。

进一步，这等价于对于任何开集的包含对 $U \subseteq V$，$\mathscr{L}(V) \to \mathscr{L}(U)$ 是满射。

同样，可以定义层的 flasque 消解：正合列 $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{L}^\bullet$ 满足 $\mathscr{L}^{i \geq 0}$ 是 flasque 的。

Flasque 层有相当简单的构造：对于一个层 $\mathscr{F}$，取 Godement 层 $\mathcal{G}^0\mathscr{F} = \prod_{x \in X} \mathscr{F}_x$，$\mathcal{G}^0 : \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ 称为 Godement 函子。另一方面它是正合函子，因为对于每个截面都是正合的，而此时指标集是 Directed Set，于是茎（正向极限）也是正合的，从而由定理 3.1.12，层也是正合的。

自然，Godement 层是 flasque 的。同时层 $\mathscr{F}$ 有一个自然的嵌入 $0 \to \mathscr{F} \to \mathcal{G}^0\mathscr{F}$：定义 $\mathscr{F}(U) \to \mathcal{G}^0\mathscr{F}(U)$ 为 $s \mapsto (s(x))_{x \in U}$，其中 $s(x)$ 为 s 在茎 $\mathscr{F}_x$ 中的像。

因此得到：

定理 3.2.7. *对于任何一个层，flasque 消解总是存在的：*

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathcal{G}^0\mathscr{F} \to \mathcal{G}^1\mathscr{F} \to \cdots$$

证明. 归纳地构造，记 $d^i : \mathcal{G}^i\mathscr{F} \to \mathcal{G}^{i+1}\mathscr{F}$，定义 $\mathcal{G}^{q+1}\mathscr{F} = \mathcal{G}^0(\operatorname{coker} d^{q-1})$，$d^q$ 定义为如下映射的符合：$\mathcal{G}^q\mathscr{F} \to \operatorname{coker} d^{q-1} \to \mathcal{G}^{q+1}\mathscr{F} = \mathcal{G}^0(\operatorname{coker} d^{q-1})$。正合性是相当容易验证的，Flasque 也是显然的，因为每一项都是某个层的 Godement 层。 □

命题 3.2.8. *内射层 $\mathscr{F}$ 一定是 flasque 层。*

证明. 由于短正合列中如果第一项是内射对象，那么序列一定分裂（容易直接从内射的定义推出）。

然而有正合列 $0 \to \mathscr{F} \to \mathcal{G}^0\mathscr{F} \to \mathcal{G}^0\mathscr{F}/\mathscr{F} \to 0$，于是这个序列是分裂的。

另一方面 flasque 层的直和因子也是 flasque 的，由分裂说明 $\mathscr{F}$ 是 flasque 的。 □

现在还需要说明 flasque 层是 acyclic 的。

引理 3.2.9. *对于层的正合列 $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$，$\mathscr{F}'$ 是 flasque 的，那么其整体截面 $0 \to \Gamma(\mathscr{F}') \to \Gamma(\mathscr{F}) \to \Gamma(\mathscr{F}'') \to 0$ 是正合的。*

证明. 左正合是平凡的，因此只需证明 $\phi_X : \Gamma(\mathscr{F}) \to \Gamma(\mathscr{F}'')$ 是满的。

对于任何 $s'' \in \Gamma(\mathscr{F}'')$，定义族 $\mathfrak{X} = \{(U,s)|U \subseteq X \ is \ open, s \in \mathscr{F}(U) \ s.t. \ \phi(s) = s''|_U\}$ ，其上偏序 $(U_1,s_1) \preceq (U_2,s_2)$ 定义为 $U_1 \subseteq U_2$，且 $s_2|_{U_1} = s_1$。常规运用 Zorn 引理知极大元 (U_0,s_0) 存在。

如果 $U_0 = X$，那么 s_0 就是原像。若否，选择 $x \in X - U_0$。由于 $\phi : \mathscr{F} \to \mathscr{F}''$ 是满的，那么其在茎上的态射也是满的，于是存在开集 $V \subseteq X, t \in \mathscr{F}(V), \phi(t) = s''|_V$。那么 $s_0 - t$ 在 $\mathscr{F}''(U_0 \cap V)$ 中的像是 0，于是由正合性自然可以视为 $\mathscr{F}'(U_0 \cap V)$ 中的元素（将 $\mathscr{F}'$ 视为 $\mathscr{F}$ 的子层）

由 $\mathscr{F}'$flasque，$s_0 - t$ 可以延拓为 $\mathscr{F}'(X)$ 的元素 r。注意 s_0 和 $t + r$ 在 $\mathscr{F}(U_0 \cap V)$ 上相同，于是可以粘合为 $\mathscr{F}(U_0 \cup V)$ 中的元素，那么自然这是一个严格大于 (U_0,s_0) 的元素，从而矛盾。

因此 ϕ_X 是满的。 □

引理 3.2.10. *对于层的正合列 $0 \to \mathscr{L}' \to \mathscr{L} \to \mathscr{Q} \to 0$，如果 $\mathscr{L}, \mathscr{L}'$ 都是 flasque 的，那么 $\mathscr{Q}$ 也是 flasque 的。*

证明. 由于层正合等价于茎正合，对于开集 $U \subseteq X$，将层限制到开集 U 中仍然有：$0 \to \mathscr{L}'|_U \to \mathscr{L}|_U \to \mathscr{Q}|_U \to 0$

$\mathscr{L}'$flasque 意味着 $\mathscr{L}'|_U$ 也是 flasque 的，于是由引理 3.2.9，$\mathscr{L}(U) \to \mathscr{Q}(U)$ 是满的。

然而考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L}(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d] & \mathscr{Q}(X) \arrow[d] \\
\mathscr{L}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] & \mathscr{Q}(U)
\end{tikzcd}$$

$\mathscr{L}$ 是 flasque 的，因此左侧箭头是满的，前文已证下方箭头是满的。因此右侧箭头是满的，从而证明了 flasque。 □

定理 3.2.11. *Flasque 层 $\mathscr{L}$ 是 acyclic 的。*

证明. 由于层范畴内射对象足够，对于 flasque 层 $\mathscr{L}$，取内射层 $\mathscr{E}$ 和消解 $0 \to \mathscr{L} \to \mathscr{E} \to \mathscr{Q} \to 0$，由 引理 3.2.10$\mathscr{Q}$ 是 flasque 的（因为内射层是 flasque 的）。

现在归纳地证明 $H^q(\mathscr{L}) = 0, q \geq 1$。考虑上同调的长正合列（正是导出函子的长正合列），当 $q = 1$ 时

$$H^0(\mathscr{E}) \to H^0(\mathscr{Q}) \to H^1(\mathscr{L}) \to H^1(\mathscr{E})$$

由于 $H^1(\mathscr{E}) = 0$，那么 $H^1(\mathscr{L}) = \operatorname{coker}\{H^0(\mathscr{E}) \to H^0(\mathscr{Q})\} = \operatorname{coker}\{\Gamma(\mathscr{E}) \to \Gamma(\mathscr{Q})\}$ ，然而由引理 3.2.9，它是 0.

对于 $q+1$ 的情况，由于长正合列 $H^q(\mathscr{Q}) \to H^{q+1}(\mathscr{E}) \to H^{q+1}(\mathscr{L})$，$H^{q+1}(\mathscr{E}) = 0$，于是 $H^q(\mathscr{Q}) \cong H^{q+1}(\mathscr{L})$，那么同理定理 3.2.4中的归纳步骤（dimension shifting），总可将问题化归至 $q = 1$ 的情况，从而得证。 □

推论 3.2.12. *Godement 消解可以计算层上同调。*

Fine 层

在几何领域，人们一般更关心的是流形上的情况而非一般的拓扑空间。因此给出一个计算流形上层上同调的方法也是很有必要的。

在此，首先回顾一些微分几何中就已提及的概念和事实，对流形的拓扑性质做一些总结：

定义 3.2.13 (局部紧性)**.** 拓扑空间 X 在点 x 处局部紧致，若存在 x 的开邻域 U 和紧集 C，使得 $x \in U \subseteq C$，若 X 在每点局部紧致，则称 X 局部紧致。

自然，流形是局部紧的，因为 $\mathbb{R}^n$ 的开集都是局部紧的。对于 Hausdorff 空间，局部紧致性有一个重要的等价表述。

定理 3.2.14 (Hausdorff 空间的局部紧致性)**.** *Hausdorff 空间 X 在点 x 处局部紧致* $\iff \forall U \ni x$ *open*, $\exists V \ni x$ *open*, $\bar{V} \subseteq U, \bar{V}$ *compact*

证明. 只需证明 $\implies$

存在 x 的开邻域 W 和紧集 C，$x \in W \subseteq C$，那么 C 闭。对于任意 x 的开邻域 U，$C \backslash U = C \cap (X \backslash U)$ 是闭的，从而紧。那么存在两个开集 V_1, V_2 将 $x, C\backslash U$ 分离。(将紧集中每个点取出来，用 T_2 公理得到许多组分离开邻域，利用紧性选出有限组，将紧集中点的开邻域取并，单点的开邻域取交就满足要求)

从而 $V_1 \subseteq X \backslash V_2$ 进而 $\bar{V_1} \subseteq X \backslash V_2$。再取 $V = V_1 \cap W$，V 是 x 的开邻域，则 $\bar{V} \subseteq \bar{V_1} \cap \bar{W} \subseteq (X \backslash V_2) \cap C = C \backslash V_2 \subseteq U$，而上一等式还能说明 $\bar{V} \subseteq C$，从而是 C 的相对闭集，从而 $\bar{V}$ 紧，得证。 □

定义 3.2.15 (预紧集)**.** 闭包为紧集的子集。

定理 3.2.14相当于：Hausdorff 空间在点 x 处局部紧，若每个开邻域都包含一个预紧的开邻域

定理 3.2.16. *Hausdorff 空间局部紧* $\iff$ *它有一组预紧开集构成的拓扑基*

证明. 考虑到拓扑基生成拓扑的判定：(X, τ) 为拓扑空间，$\mathcal{B}$ 为 X 的一个开集族，那么 B 生成拓扑 τ，当且仅当：对 X 中任何开集 U，对 U 中任意一点 x，存在 $\mathcal{B}$ 中的开集 V，使得 $x \in V \subseteq U$。那么利用定理 3.2.14这个命题就显然了。 □

定义 3.2.17 (紧穷尽:exhaustion by compact sets)**.** : 拓扑空间 X 的一个紧穷尽指一列紧子集 $\{K_n\}$，且 $\cup K_n = X, K_i \subseteq \mathrm{Int} K_{i+1}$

定理 3.2.18. *C_2 的局部紧 Hausdorff 空间 X 存在紧穷尽*

证明. X 有一组预紧开集拓扑基 $\mathcal{K}$，以及一个可数拓扑基 $\mathcal{B}$，先来说明 $\mathcal{B}$ 有一个预紧的子拓扑基。

取至多可数子集族 $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} | B \subseteq \exists K \in \mathcal{K}\}$，这样，对于每一个 $B \in \mathcal{B}'$，对于 X 中每一点 x，自然有 $\mathcal{K}$ 中元素 K 满足 $K \ni x$，而 $\mathcal{B}$ 是拓扑基，于是自然有某个 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subseteq K$ (因为 K 开集，必然能表示成若干拓扑基中元素的并)。但这样的 $B \in \mathcal{B}'$，从而说

明 $\mathcal{B}'$ 是开覆盖。但是对每个 $\mathcal{B}'$ 中的元素，其闭包都在紧集 $\bar{K}$ 中，于是自然 $\mathcal{B}'$ 由预紧开集构成。

$\mathcal{B}'$ 能够成为生成原有拓扑的子拓扑基是因为对于任意开集 U，它可表示为若干 $K \subseteq \mathcal{K}$ 的并，对 U 中任意一点 x，设 $x \subseteq K_\alpha$，那么自然有某个 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subseteq K_\alpha$（原因同上）。于是这就自动满足拓扑基生成拓扑判定定理的条件了，从而 $\mathcal{B}'$ 是一个预紧开集构成的拓扑基。

设 $\{U_i\}$ 为一组可数预紧开集构成的拓扑基（上述讨论保证了存在性），下面选取紧穷尽：

$K_1 = \bar{U_1}$，自然 $K_1 \subseteq \bar{U_1} \cup \cdots \cup \bar{U_{i_2}}$，紧性保证 i_2 存在，我们选取最小的使这个式子成立的指标 i_2，且 $i_2 > 1 = i_1$。取 $K_2 = \bar{U_1} \cup \cdots \cup \bar{U_{i_2}}$。这样 $K_1 \subseteq \mathrm{Int}K_2$。反复构造下去并且保证指标序列 $\{i_n\}$ 严格增。那么这就是满足要求的紧穷尽。 □

称子集族局部有限，若对于每点，存在开邻域与子集族中至多有限个子集相交。

对于两个开覆盖 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$，若每个 $\mathcal{V}$ 中的开集 V 都能找到一个 $\mathcal{U}$ 中开集 U 使得 $V \subseteq U$，则称 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{U}$ 的加细。

定义 3.2.19 (仿紧性). ：若拓扑空间 X 的每个开覆盖都有局部有限的开覆盖加细，则称 X 仿紧。

我们之前的一切准备工作都是为了说明如下的重要的结论：

定理 3.2.20. *拓扑流形仿紧。*

证明. 设 M 是一个拓扑流形，$\mathcal{U}$ 为一个开覆盖，$\{K_i\}$ 为一个紧穷尽。（拓扑流形当然是局部紧 Hausdorff 空间）

记 $V_i = K_{i+1} - \mathrm{Int}\ K_i\ W_i = \mathrm{Int}\ K_{i+2} - K_{i-1}$（指标超出定义域时按空集理解）

那么 V_i 紧，W_i 开，且 $V_i \subseteq W_i$

对于 M 上每点 x，取 $\mathcal{U}$ 中元素 $U_x \ni x$，那么对于每个指标 i 可以取一个 x 处的局部坐标系 $\{V_{xi}^{pre}, \varphi_{xi}\}$，使得 $x \in V_{xi}^{pre} \subseteq U_x \cap W_i$。由于局部紧，可以选出一个 $x \in V_{xi} \subseteq V_{xi}^{pre}$，且 V_{xi} 是一个预紧开邻域，那么自然它也是坐标域，并且沿用同样的同胚 φ_{xi}。

（接下来做了一点点加强，可以看到这一加强可以自然引出 Urysohn 引理，尽管如此对于这个命题本身它们当然是不重要的）取适当的 φ_{xi} 使得 $\varphi_{xi}(x) = 0, \varphi_{xi}(V_x) = B(0, 3)$

记 $T_{xi} = \varphi_{xi}^{-1}(B(0, 1))$，当然存在有限个 T_{xi} 覆盖了 V_i，设为 $T_{x1_i}, \cdots, T_{xn_i}$，于是它们对应着 $V_{x1_i}, \cdots, V_{xn_i}$

于是对于每一个 i 如此操作，就得到若干 V_{xn_i}，这是一个开覆盖加细（开覆盖是因为它们覆盖了 V_i），并且满足局部有限性：取点 x 的开邻域为任一 V_{xi} 即可（不妨 $i = 1$）。

局部有限性是因为对于任意 $V_{xi} \subseteq W_i$，$V_{xn_j} \cap V_{xi} \neq \phi \implies W_i \cap W_j \neq \phi \implies j \in [i-2, i+2]$。而这种情况当然是有限的。 □

回忆单位分拆定理，我们对层也有类似的定义：

定义 3.2.21 (Fine 层). 称仿紧空间 X 上的层 $\mathscr{F}$ 是 fine 层，如果对于每个局部有限开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$，存在一族层的自同态 $(\eta_i : \mathscr{F} \to \mathscr{F})_{\{i \in I\}}$ 满足：

1.$\forall i \in I$，存在 $X - U_i$ 的某个开邻域 V_i，使得在其上 η_i 是零映射。

2.$\sum_i \eta_i = 1_{\mathscr{F}}$

自然，流形上的微分形式层，光滑函数层；复流形上的 $(p,q)-$ 形式层都是 fine 层：这正是单位分拆定理的重述。然而另一方面我们还有：

定理 3.2.22. *Fine 层是 acyclic 的。*

证明. 对于 fine 层 $\mathscr{F}$，取内射消解 $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{I}^\bullet$

对于 $s \in \Gamma(\mathscr{I}^p)$，$ds = 0$。由于层正合诱导茎正合。而由正向极限知，对于每个 $x \in X$，存在一个 $U \ni x$，使得 $\exists t \in \Gamma(U, \mathscr{I}^{p-1}), dt = s|_U$

因此我们有了一族开覆盖 $\{U_i\}$，和对应的 t_i。由于仿紧，可以将覆盖加细（当然 $dt = s|_U$ 的性质被保持了）。因此无妨假定这组开覆盖是局部有限的。那么由于层 $\mathscr{F}$ 是 fine 层，自然有：

$$s = \sum \eta_i(s) = \sum \eta_i(s)|_{U_i} = \sum d(\eta_i(t_i)) = d\sum \eta_i(t_i)$$

其中最后两个等式中的 η_i 是自同态 $\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 到链复形的提升：比较定理。

于是这就说明了 acyclic。 □

因此 Fine 消解也可以用来计算层上同调。于是现在回来看如下两个消解，它们当然都是 Fine 消解：

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathscr{A}^0 (= \mathscr{C}^\infty) \xrightarrow{d} \mathscr{A}^1 \xrightarrow{d} \cdots$$

$$0 \to \Omega^p \to \mathscr{A}^{(p,0)} \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{A}^{(p,1)} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots$$

应用前述结果立刻得到：

定理 3.2.23 (De Rham/Dolbeault 定理)**.**

$$H^p_{dR}(M, \mathbb{R}) \cong H^p(M, \mathbb{R})$$

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(M) \cong H^q(M, \Omega^p)$$

3.2.2 Cech 上同调

接下来介绍的是另一种（可能的）处理层上同调的思路，在计算上它相比之前的取消解计算的方法有着一定的优势。

接下来定义一个抽象的单纯形结构。

定义 3.2.24 (Cech nerve)**.** 对于 X 上的开覆盖 $\mathfrak{U} = \{U_i\}$，定义单纯形 $N(\mathfrak{U})$ 如下：

其顶点集 $Vert(N(\mathfrak{U})) = \mathfrak{U}$，$q-$ 单形为 $(q+1)$ 个互异的 $\mathfrak{U}$ 中开集组成的对 $\sigma = [U_{i_0}, \cdots, U_{i_q}]$，并且 $\cap_{j=0}^q U_{i_j} \neq \varnothing$。

自然，对于任何一个单纯形 K，我们可以定义出一个单纯链复形 $C_\bullet(K)$。进一步地，就有一个 G- 系数的上链复形 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_\bullet(K), G) = C^\bullet(K, G)$。

定义 3.2.25. 对于 Cech Nerve$N(\mathfrak{U})$，自然也有一个 G- 系数的上链复形 $C^\bullet(N(\mathfrak{U}), G)$，定义其上同调群 $H^q(\mathfrak{U}, G)$ 为开覆盖 $\mathfrak{U}$ 的 G- 系数上同调群。

进一步，对于 X 上的层 $\mathscr{F}$，定义上链群 $C^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})=\prod_{\sigma:q-simplex}\mathscr{F}(U_\sigma)$。上边缘映射 $C^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})C^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ 定义如下：

对于 $x\in C^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$，$\delta_x$ 的 $[U_{i_0},\cdots,U_{i_{q+1}}]$ 分量为：

$$\sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j(x)_{[U_{i_0},\cdots,\widehat{U_{i_j}},\cdots,U_{i_{q+1}}]}|_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{q+1}}}$$

因此现在有了一个上链复形 $C^\bullet(N(\mathfrak{U}),\mathscr{F})$。

定义 3.2.26. 定义开覆盖 $\mathfrak{U}$ 的 $\mathscr{F}$- 系数上同调为 $C^\bullet(N(\mathfrak{U}),\mathscr{F})$ 的上同调，记为 $\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$。

自然想问这个上同调与层上同调是否相同，欲说明它们相同，回忆定理 3.2.5。然而很不幸，这个上同调并不能够保证长正合列的存在。

有以下事实成立。

例子.

1.$\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})=\mathscr{F}(X)$。*这是因为* $\delta^0:(s_U)\mapsto(s_V|_{U\cap V}-s_U|_{U\cap V})$，*于是* $\ker\delta^0$ *正是全体满足粘合条件的* (s_U)，*于是自然变为整体截面的全体元素，即为* $\mathscr{F}(X)$。

2. 对于常值层 $\mathscr{G}=G$，*很容易验证* $\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathscr{G})\cong H^q(\mathfrak{U},G)$：*层系数上同调能够退化为群系数的。*

3. 考虑单纯形 $N(\mathfrak{U})$ *的维数* $n=\dim N(\mathfrak{U})$，*自然对* $q>n$，$\check{H}^q(N(\mathfrak{U}),\mathscr{F})=0$

4. 对于层正合列 $0\to\mathbb{Z}\to\mathscr{O}\to\mathscr{O}^*\to 0$，*考虑开覆盖* $\mathfrak{U}=X$，*自然* $\dim N(\mathfrak{U})=0$ *于是考虑对应的长序列*

$$0\to\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathbb{Z})\to\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{O})\to\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{O}^*)\to\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathbb{Z})$$

自然可以验证它不是正合的，因为这个序列是否直接变成了全局截面是否正合。

5.$\check{H}^q$ *当然可以与开覆盖的选取有关。*

注意到第 5 点，自然的想法就是通过取正向极限消除对开覆盖的依赖。尽管如此，全体开覆盖在加细下并没有构成偏序集，因此直接对开覆盖取正向极限是不可行的。（更何况对于加细映射，我们并不能够直观地看出诱导出 $\check{H}^q$ 之间的映射是否与加细映射的选取有关）

解决方法是直接从这些 $\check{H}$ 之间的关系开始。

定义 3.2.27. 对于单纯形 $K\to L$，映射 $f:Vert(K)\to Vert(L)$ 是单纯映射，如果它将 K 中的单形映为 L 中的。（注意，这并不要求 f 是单的）

两个单纯映射 $f,g:K\to L$ 被称为 contiguous 的，如果对于任何 K 中单形 $[v_0,\cdots,v_q]$，$[fv_0,\cdots,fv_q,gv_0,\cdots,gv_q]$ 是 L 中单形。

自然，对于任何加细映射 $r:\mathfrak{V}\to\mathfrak{U}$，它都诱导出了 Cech Nerve 之间的单纯映射。更进一步，任何两个加细映射都是 contiguous 的。

对于任何单纯映射 $f:K\to L$，自然它诱导了 $H^q(L)\to H^q(K)$ 的映射。

以下的引理可以看出 contiguous 映射的优良性质。

引理 3.2.28.

1. 对于 contiguous 的单纯映射 $f,g:K\to L$，*诱导的映射* $f^*,g^*:H^q(L)\to H^q(K)$ *满足* $f^*=g^*$

2. 对于到自身的加细映射 $r:\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}$，*它诱导出的* $r^*:\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})\to\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ *是 id*。

证明.

1. 由于链同伦的映射诱导出相同的上同调群之间的映射，下面只需说明 f, g 是链同伦。

我们只需说明 f, g 诱导的单纯链群 $C_\bullet(K)$ 的映射 f_*, g_* 是链同伦。对此，直接构造 $u : C_n(K) \to C_{n+1}(L)$

$$u([v_0, \cdots, v_n]) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [f(v_0), \cdots, f(v_i), g(v_i), \cdots, g(v_n)]$$

经检验 $ud + du = g_* - f_*$，因此自然就证明了结果。

2. 注意任何加细映射都是 contiguous 的，于是 r 和 id 诱导了相同的上同调群之间的态射。 □

现在定义 $\check{H}^q(\mathcal{V}, \mathscr{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$，如果存在加细映射 $r : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$。前文的引理保证了这是偏序，并且加细映射诱导出唯一的态射。

我们现在自然想对全体 $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$ 取正向极限，然而这是有一些集合论上的困难的，因为全体开覆盖并没有构成一个集合，而是一个类。

为了规避这个困难，我们要求开覆盖 $\mathcal{U}$ 中的开集互异。很明显这样的元素的确是 cofinals（因此直观上这样的操作的确没有改变正向极限，尽管严格说明这一点需要一些讨论，参见 [Rot09, page 390]）更重要的是，这样要求后得到的的确是一个集合了，因此现在现在可以取正向极限。

定义 3.2.29 (Cech 上同调). 拓扑空间 X 上的层 $\mathscr{F}$ 系数 Cech 上同调定义为正向极限

$$\check{H}^q(X, \mathscr{F}) = \varinjlim_{\mathcal{H}} \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{F})$$

其中 $\mathcal{U} \in \mathcal{H}$ 为全体开集互异的开覆盖。

自然，前文的例子指出 $\check{H}^0(X, \mathscr{F}) = \mathscr{F}(X) \cong H^0(X, \mathscr{F})$。

尽管如此，在一般情况下 Cech 上同调仍然并不一定和层上同调相同。但是在仿紧空间上我们发现 Cech 上同调存在一个长正合列，并且内射层的 Cech 上同调也是 0。这样就可以利用定理 3.2.5说明 Cech 上同调与层上同调相符。

最后给出一个计算性质的定理。

定理 3.2.30 (Cartan-Leray 引理). 设 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ 是仿紧空间 X 的开覆盖，使得对于任何 $\alpha_0, \cdots, \alpha_k$，$k \geq 1$，都有

$$H^k(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}, \mathscr{F}\Big|_{U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}}) = 0$$

那么 $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \cong H^q(X, \mathscr{F})$

引理 3.2.31 ($n\times n$ 引理). 对于双复形

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A_0 \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & B_0 \arrow[r] \arrow[d] & K_{00} \arrow[r] \arrow[d] & K_{01} \arrow[r] \arrow[d] & K_{02} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & K_{10} \arrow[r] \arrow[d] & K_{11} \arrow[r] \arrow[d] & K_{12} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & K_{20} \arrow[r] \arrow[d] & K_{21} \arrow[r] \arrow[d] & K_{22} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

如果除第二行和第二列外的所有行和列都是正合的，那么 $H^\bullet(A)\cong H^\bullet(B)$，即第二行和第二列的上同调群对应同构。

证明. 追图。或者利用 Salamander 引理 [Ber12, Lem 2.6] □

现在回到 Cartan-Leray 引理。

证明. 取层 $\mathscr{F}$ 的一个 flasque 消解：$0\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}_0\to\mathscr{F}_1\to\cdots$，考虑双复形：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X,\mathscr{F}_0) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X,\mathscr{F}_1) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X,\mathscr{F}_2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}_0) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}_1) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}_2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}_0) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}_1) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}_2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & C^2(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & C^2(\mathfrak{U},\mathscr{F}_0) \arrow[r] \arrow[d] & C^2(\mathfrak{U},\mathscr{F}_1) \arrow[r] \arrow[d] & C^2(\mathfrak{U},\mathscr{F}_2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

第二行到第三行的每个纵向箭头是整体截面到每个开覆盖的限制。

列正合由 flasque 层的性质得到，行正合则是条件的推论。因此使用 $n\times n$ 引理即得到结论。 □

注记. Cartan-Leray 引理还有一个利用谱序列的证明，参见 [Fu23]。

3.2.3 计算

第四章 向量丛，联络和曲率

4.1 复向量丛

定义 4.1.1 (向量丛). 对于微分流形 M，其上光滑向量丛定义为 $E = \coprod_{x\in M} E_x$，其中 $\{E_x\}_{x\in M}$ 为一族同构的线性空间 $\mathbb{C}^n$。

定义投影映射 $\pi : E \to M$ 将 E_x 映至 x。其上的拓扑结构和微分结构由如下给出：$\forall x_0 \in M$，存在包含 x_0 的 M 的开集 U 使得有微分同胚 $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$。并且这一同胚限制到 $E_x \to \mathbb{C}^n$ 上是线性同构。

最后还要求投影映射 π 在这一结构下是光滑的。

特殊地，我们一般将 1 维向量丛称为线丛。

从底流形的角度看，对于任何两组平凡化 φ_U, φ_V，我们有描述纤维上结构变化的转移函数 $g_{UV} : U \cap V \to GL$：

定义为 $x \mapsto (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1})|_{\{x\}\times\mathbb{C}^n}$，当然它是 $\mathbb{C}^\infty$ 的。自然 $g_{UV} \cdot g_{VU} = \mathrm{id}$，且 $g_{UV} \cdot g_{VW} \cdot g_{WU} = \mathrm{id}$。

并且容易看出对于流形上的一组开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和 $\mathbb{C}^\infty$ 的转移函数 $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL$，只要满足上述条件就能够构造出唯一的向量丛。

这个论断是简单的，因为这样的向量丛只能是 $(\coprod U_\alpha \times \mathbb{C}^n)/\sim$（其中 $\sim$ 由转移函数给出，两条性质保证了 $\sim$ 是等价关系，流形结构由积流形 $U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ 给出）。

接下来是一些向量丛的运算：

1. 对偶丛

取 $E_x^* = (E_x)^*$，局部平凡化也自然得到诱导，这样得到的丛称为对偶丛 E^*。（当然对偶丛的构造也可以从转移函数视角得到：取 $j = (g^T)^{-1}$）

2. 直和

$E \oplus F$：转移函数 $j = \mathrm{diag}(g, h)$

3. 张量积

$E \oplus F$：转移函数 $j = g \otimes h$

4. 外积

$\wedge^r E$：转移函数 $j = \wedge^r g$，特别地对于 k 维向量丛，$\wedge^k E$ 是线丛，称为 E 的行列式丛。

5. 子丛与商丛

在每个 E_x 中选取线性子空间 F_x 得到子流形 $F=\cup F_x$ 称为 E 的子丛。这实际上要求局部平凡化对 F 也成立，i.e. $\varphi_U : F_U \to U\times\mathbb{C}^l \subseteq U\times\mathbb{C}^k$。

在上述局部平凡化下，基本的线性代数指出转移函数 g_{UV} 具有分块形式：

$$\begin{pmatrix} h_{UV} & k_{UV} \\ 0 & j_{UV} \end{pmatrix}$$

那么实际上子丛就是由 h_{UV} 决定的 l 维向量丛罢了。对偶地，定义商丛 E/F 为 j_{UV} 决定的 $k-l$ 维向量丛。

定义 4.1.2 (拉回)**.** 对于流形间的光滑映射 $f: M\to N$，向量丛 $E\to N$。定义向量丛的拉回 f^*E 为 $(f^*E)_x = E_{f(x)}$，其平凡化 $f^*\varphi_U : f^*E_{f^{-1}(U)} \to f^{-1}(U)\times\mathbb{C}^n$ 自然地由 E 继承而来，并使得它也成为向量丛，转移函数在拉回下保持不变。

定义 4.1.3 (向量丛的态射)**.** 自然向量丛的态射定义为保持纤维结构的光滑映射，并且在每条纤维上是线性同构。在此情况下 $\ker f=\cup\ker f_x, \operatorname{Im} f=\cup\operatorname{Im} f_x$ 自然成为了 E,F 的子丛。

注记. 这个定义强烈暗示了全体（复）向量丛可能具有某种代数结构，事实上的确如此。

定理 4.1.4 (Serre-Swan 定理)**.** *对于紧 Hausdorff 空间 X，其上全体拓扑复向量丛与投射 $C(X)-$ 模存在范畴等价，这个等价由丛到全体整体截面构成的 $C(X)-$ 模：$E\leftrightarrow\Gamma(E)$ 给出。*

定义 4.1.5 (截面)**.** 一个向量丛在开集 $U\subseteq M$ 上的截面定义为光滑映射 $\sigma: U\to E$，使得 $\pi\circ\sigma=\mathrm{id}_U$，其中 $\pi: E\to M$ 为投影映射。

注记. 定义 E 在开集 $U\subseteq M$ 上的一个标架为一族截面 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$，使得对于每个 $x\in U$，$\{\sigma_1(x),\cdots,\sigma_k(x)\}$ 都是 E_x 的一组基。这和平凡化说的实际上是同一件事：因为这直接就诱导出了 $\varphi_U:\lambda\mapsto(\pi(\lambda),(\lambda_1,\cdots,\lambda_k))$，其中 $\lambda=\sum\lambda_i\sigma_i(x)$。

当然很容易就可以验证反过来这也是对的，于是标架和平凡化是完全相同的。

现在进入复流形的领域。

定义 4.1.6 (全纯向量丛)**.** 复流形 M 上的全纯向量丛定义为一个向量丛 $E\xrightarrow{\pi}M$，使得其平凡化 $\varphi_U: E_U\to U\times\mathbb{C}^k$ 不仅仅是微分同胚，而且是双全纯映射。这样 E 同时具有了复向量丛和复流形结构。

注记. 与实流形上的向量丛情况几乎完全相同，只要过渡函数 $g_{UV}\in GL$ 还是全纯映射，并且满足前文提及的循环条件，那么这就唯一地决定了一个全纯向量丛。

自然，对偶丛，直和，张量积，外积仍然可以对全纯向量丛定义。对于丛的拉回，由定义可以看出只要映射 $f: M\to N$ 是全纯的，那么全纯向量丛的拉回丛也自然继承了全纯结构。

全纯向量丛之间的态射相比一般向量丛只需再加上 $f: E\to F$ 是全纯的即可。全纯子向量丛需要求子向量丛具有复流形结构，这实际上并没有比光滑流形上的情况要求更多：因为局部

平凡化一旦成立，那么它自然是全纯的（由于原先的向量丛已经是全纯的了）；同样商丛也是全纯向量丛。

还可以仿照前述定义全纯截面：它只比一般的截面多要求了全纯性，自然也可以定义全纯标架。另外容易观察到对于任何一个截面 σ 和一组全纯标架 $\{\sigma_1,\cdots,\sigma_k\}$，有：

$$\sigma(x)=\sum f_i\sigma_i(x)$$

那么 σ 是全纯截面 $\iff$ 每个 f_i 都是全纯函数。

与光滑流形上不同，对于 $E-$ 取值微分形式，此时不再有一般的外微分算子 d。存在的只有 $\bar\partial : A^{p,q}(E)\to A^{p,q+1}(E)$。

定义 4.1.7 ($E-$ 值微分形式的 $\bar\partial$ 算子). 对于 $E-$ 取值 (p,q) 形式 σ，局部全纯标架 $\{e_i\}$（自然标架和平凡化的等同性在全纯情况下依然保持），设：

$$\sigma=\sum\omega_i\otimes e_i$$

定义

$$\bar\partial\sigma=\sum\bar\partial\omega_i\otimes e_i$$

很容易验证这个定义是标架选取无关的。对于任何两组全纯标架，设其过渡矩阵为 $\{g_{ij}\}$（当然是全纯的），利用全纯函数可以在 $\bar\partial$ 算子下提出立刻就能得到证明。

例子 (切丛). *1. 几何学里切丛是一个极其重要的对象。对于复流形 M 上一点 $x\in U\subseteq M$，坐标映射 $\varphi_U:U\to\mathbb{C}^n$ 诱导了切映射 $T_x(M)\to T_{\varphi(x)}(\mathbb{C}^n)\cong\mathbb{C}^{2n}$，那么在局部上即有微分同胚 $\cup_{x\in U}T_x(M)\cong U\times\mathbb{C}^{2n}$。*

因此这就得到了一个向量丛，称为切丛 TM。其中转移函数为 $J_{\mathbb{R}}(\varphi_U\varphi_V^{-1})$。

2. 由于 $T_x(M)=T'_x(M)\oplus T''_x(M)$，可以验证 T',T'' 都是子向量丛。并且更进一步地 T' 还是全纯向量丛。

3. 类似地，自然还可以定义 $T^*,T^{*\prime},T^{*\prime\prime},T^{*(p,q)}$ 等等。

最后还有两个特殊且重要的例子：

定义 4.1.8 (法丛和余法丛). 对于复流形 M 的子复流形 V，自然有嵌入 $T'(V)\hookrightarrow T'(M)|_V$，定义这个嵌入的商丛（coker）为法丛 $N_{V/M}$，定义其对偶为余法丛 $N^*_{V/M}$（注意这里考虑的都是全纯切空间）

4.2 度量，联络和曲率

4.2.1 Hermitian 度量，向量丛的联络

定义 4.2.1 (向量丛上的度量). 对于一个复向量丛 $E\to M$，其上的 Hermitian 度量指每个纤维 E_x 上的 Hermitian 内积，并且这个度量关于 x 是光滑的，i.e. 对于标架 $\zeta=\{\zeta_1,\cdots,\zeta_k\}$，$h_{ij}(x)=(\zeta_i(x),\zeta_j(x))$ 是光滑的。

具有这样的 Hermitian 度量的**全纯向量丛**称为 Hermitian 向量丛。

对于一组标架 ζ，称它为酉标架（w.r.t. 某个 Hermitian 度量），如果 $\zeta_1(x),\cdots,\zeta_k(x)$ 对所有 x 都是一组 Hermitian 度量下的正交基。同样，Gram-Schmidt 正交化保证了这样的标架是局部存在的。

对于复向量丛及其子丛 $F\subset E$，F 自然在 E 的某个 Hermitian 内积下有正交补空间，这样的补空间也构成了丛，并且很容易验证它和 E/F 是 C^∞ 同构的。

例子. *在 $\mathbb{C}P^m$ 的线丛 $\mathscr{O}(n)$ 上我们有自然的度量：$\dfrac{1}{(1+|s|^2)^n}$，特别地当 m 是 1 时，切丛为 $\mathscr{O}(2)$，这给出了一个自然的度量：它和前文的 Fubini-Study 度量是相同的。*

定义 4.2.2 (联络). 复向量丛 $E\to M$ 上的联络是指映射

$$D:\mathscr{A}^0(E)=\Gamma(E)\to\mathscr{A}^1(E)=\Omega^1(X,E)$$

满足 Leibniz 律：

$$D(f\cdot\xi)=\xi\otimes df+f\cdot D(\xi)$$

对于所有 $f\in C^\infty(M),\xi\in\mathscr{A}^0(E)$ 成立。

注记. 联络的动机是协变导数，近似地说 D 可以理解成将 E 的截面输入，输出 E 对任何切向量场求协变导数的规则。

对于 E 在 U 上的一组标架 $e=\{e_1,\cdots,e_n\}$，$De_i=\sum e_j\otimes\theta_j^i$，其中 θ_j^i 是 1-形式。那么对于固定的标架，方阵 $\theta=(\theta_j^i)$ 完全决定了联络，显式地写出来如下。

对于一般的 $\sigma\in\Gamma(U)=\mathscr{A}^0(E)(U)$，有 $\sigma=\sum\sigma_ie_i$。那么：

$$\begin{aligned}D\sigma&=\sum d\sigma_i\otimes e_i+\sum\sigma_i\cdot De_i\\&=\sum_j(d\sigma_j+\sum_i\sigma_i\theta_{ij})\otimes e_j\end{aligned}$$

下面考察联络方阵 θ 在标架变换下的变化：如果 $e_i'=\sum e_jg_{ij}$，那么：

$$\begin{aligned}De_i'&=\sum_j e_j\otimes dg_{ij}+\sum De_i\cdot g_{ij}\\&=\sum_j e_j\otimes dg_{ij}+\sum e_i\theta_i g_{ij}\end{aligned}$$

因此写成联络方阵的形式，有：

$$\theta_{e'}=g^{-1}\cdot dg+g^{-1}\cdot\theta_e\cdot g\quad(e'=g\cdot e)$$

注意：联络方阵作用在右侧!!!

命题 4.2.3. *对于任何向量丛，联络总是存在的。*

证明. 证明简而言之就是在平凡丛上任何 1-form 都能给出一个联络，那我们只需通过单位分拆将这些平凡丛上的局部联络通过满足联络方阵变换关系的方式粘结起来。

考虑向量丛 E 的平凡化开覆盖 $\{U_\alpha\}$，由仿紧性（通过做局部有限开加细）无妨 $\{U_\alpha\}$ 是局部有限的平凡化覆盖。

选取对应的单位分解 g_α，假定 $U_\alpha \cap U_\beta$ 的转移矩阵为 $A_{\alpha\beta}$。对于每个 α 选取一个 1-form 构成的矩阵 φ_α，定义

$$\omega_\alpha = \sum_\gamma g_\gamma (A_{\gamma\alpha}^{-1} \cdot dA_{\gamma\alpha} + A_{\gamma\alpha}^{-1} \cdot \varphi_\gamma \cdot A_{\gamma\alpha})$$

我们来验证这的确满足联络方阵的变换规律，从而能够定义出一个全局的联络。现在

$$\begin{aligned} & A_{\alpha\beta}^{-1} dA_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha A_{\alpha\beta} \\ = & A_{\alpha\beta}^{-1} dA_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}^{-1} \sum_\gamma g_\gamma (A_{\gamma\alpha}^{-1} \cdot dA_{\gamma\alpha} + A_{\gamma\alpha}^{-1} \cdot \varphi_\gamma \cdot A_{\alpha\gamma}) \cdot A_{\alpha\beta} \\ = & A_{\alpha\beta}^{-1} dA_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}^{-1} \sum_\gamma g_\gamma (A_{\gamma\alpha}^{-1} \cdot dA_{\gamma\alpha} + A_{\gamma\alpha}^{-1} \cdot \varphi_\gamma \cdot A_{\alpha\gamma}) \cdot A_{\alpha\beta} \\ = & A_{\alpha\beta}^{-1} dA_{\alpha\beta} + \sum_\gamma g_\gamma (A_{\gamma\beta}^{-1} \cdot \varphi_\gamma \cdot A_{\gamma\beta}) + \sum_\gamma g_\gamma \cdot (A_{\gamma\beta}^{-1} \cdot dA_{\gamma\alpha} \cdot A_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

然而

$$\begin{aligned} A_{\gamma\beta}^{-1} \cdot dA_{\gamma\alpha} \cdot A_{\alpha\beta} &= A_{\gamma\beta}^{-1} \cdot dA_{\gamma\beta} \cdot A_{\beta\alpha} \cdot A_{\alpha\beta} + A_{\gamma\beta}^{-1} \cdot A_{\gamma\beta} \cdot dA_{\beta\alpha} \cdot A_{\alpha\beta} \\ &= A_{\gamma\beta}^{-1} \cdot dA_{\gamma\beta} - A_{\alpha\beta}^{-1} dA_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

（最后一个等号是因为 $A \cdot dA^{-1} + dA \cdot A^{-1} = 0$）

这就说明了上式是 ω_β，从而是全局定义的联络。 □

4.2.2 Chern 联络

一般情况下向量丛 E 的联络并不能被典范选取（这和古典的曲线曲面论完全不同！），但是对于复流形上的 Hermitian 向量丛，可以通过设置几个要求使得这样好的联络能够被唯一选取。

定义 4.2.4 (联络的相容性).

1. 由于 $D : \mathscr{A}^0(E) \to \mathscr{A}^1(E)$，它可以分解为 $D' : \mathscr{A}^0(E) \to \mathscr{A}^{1,0}(E)$ 和 $D'' : \mathscr{A}^0(E) \to \mathscr{A}^{0,1}(E)$，$D = D' + D''$。称联络 D 与复结构相容，如果 $D'' = \bar{\partial}$。

注意：$\bar{\partial}$ 可以从一般的外微分形式推广为任何全纯向量丛上的外微分式，这是可以良好定义的（只需仿照普通的 $\bar{\partial}$）即可。良定义性源于向量丛的全纯性，然而我们一般没有典范的外微分算子 d，实际上这就是联络 D 不能典范选取。

2. 对于 Hermitian 向量丛 $E \to M$，称联络 D 与度量相容，如果：

$$d(\xi, \eta) = (D\xi, \eta) + (\xi, D\eta)$$

引理 4.2.5. *对于 Hermitian 向量丛 $E \to M$，存在唯一的联络同时与复结构和度量相容。*

证明. 由于 Hermitian 向量丛是全纯的，因此可以局部地选取一组全纯标架 $e = (e_1, \cdots, e_n)$。如果 D 存在，那么在此标架下的联络方阵 θ 一定仅由 $(1,0)$- 形式构成（因为此时 $\bar{\partial} e_i = 0$：全纯标架）。

另一方面，令 $h_{ij} = (e_i, e_j)$，由线性只需验证 ξ, η 为标架的情况。假定 D 存在，此时

$$dh_{ij} = d(e_i, e_j) = \theta_i^k h_{kj} + h_{ik} \bar{\theta}_j^k$$

而这正是 $(1,0)$- 形式和 $(0,1)$- 形式的分解。

因此比较两端知只需满足

$$\partial h = h\theta; \bar{\partial} h = \bar{\theta} h^T$$

线性代数指出 $\theta = h^{-1} \cdot \partial h$ 是唯一的解。

通过验证 θ 在标架过渡下不变，θ 最终变为全局的唯一解，从而得到了证明。 □

这个唯一的联络称为 Chern 联络，[Che01] 称 $(1,0)-$ 型容许联络。其在全纯标架下的联络方阵由 $(1,0)$- 形式组成。另一方面，如果标架是酉的，那么 $0 = d(e_i, e_j) = \theta_{ij} + \bar{\theta_{ji}}$，因此 Chern 联络在酉标架下的联络方阵是反 Hermitian 的。可以发现它实际上是某种 Levi-Civita 联络在复流形上的模拟，事实上在 Kahler 流形的情况它确实是 Levi-Civita 联络。

定义 4.2.6 (对偶联络). 全纯向量从 E 上的 Hermitian 度量自然地诱导了 E^* 的度量：对于 E 的局部酉标架 e，考虑 e^*，并令 $(e_i^*, e_j^*) = \delta_{ij}$。$D^*$ 可以被下式唯一决定：$d < \sigma, \tau > = < D\sigma, \tau > + < \sigma, D^* \tau >$。其中 $\sigma \in \mathscr{A}^0(E), \tau \in \mathscr{A}^0(E^*)$，称为诱导的对偶联络。

可以看出 Chern 联络诱导的对偶联络还是 Chern 联络，这只需通过计算验证对偶联络的联络方阵是 $-\theta^H$。这里的 ^{H} 是 Hermite 转置。

在接下来的两个结果中将会看到 Chern 联络的良好性质。

第一个结果说明 Chern 联络在子丛下保持。

引理 4.2.7. *对于 Hermitian 向量丛 $E \to M$ 和一个全纯子向量丛 $F \subseteq E$，那么 F 继承了 E 上的度量从而也成为 Hermitian 向量丛。由于 $E = F \oplus F^\perp$，这诱导了 Chern 联络的分解，那么 $D_F = \pi_{E \to F} \circ D_E$，其中 π 是 E 顺着 $F^\perp$ 到 F 的投影。*

证明. 对于 F 的截面 $\zeta \in \mathscr{A}^0(F)$，$(\pi_F \circ D_E)''(\zeta) = \pi_F(D_E'' \zeta) = \pi_F(\bar{\partial}\zeta) = \bar{\partial}\zeta$，于是 $\pi_F \circ D_E$ 是与复结构相容的。

另一方面对于 $\zeta, \zeta' \in \mathscr{A}^0(F)$，

$$d(\zeta, \zeta') = (D_E \zeta, \zeta') + (\zeta, D_E \zeta') = (\pi_F \circ D_E \zeta, \zeta') + (\zeta, \pi_F \circ D_E \zeta')$$

因此这说明 $\pi_F \circ D_E$ 与度量相容。由 Chern 联络的唯一性得到证明。 □

第二个结果说明 Chern 联络在张量积下行为良好。

引理 4.2.8. *对两个 Hermitian 向量丛 $E, E', E \oplus E'$ 自然有一个 Hermitian 度量：$(\lambda \otimes \lambda', \delta \otimes \delta') = (\lambda, \delta) \cdot (\lambda', \delta')$。*

另一方面，对于 Chern 联络 D_E，它诱导了 $E \otimes E'$ 上的联络 $D_E \otimes 1$：$(D_E \otimes 1)(\zeta \otimes \xi) = D_E \zeta \otimes \xi$；同样有 $1 \otimes D_E'$。

那么：$D_{E \otimes E'} = D_E \otimes 1 + 1 \otimes D_{E'}$

证明. 首先复结构相容性是简单的：因为 $(D_E \zeta \otimes \xi + \zeta \otimes D_{E'} \zeta)'' = \bar{\partial}\zeta \otimes \xi + \zeta \otimes \bar{\partial}\xi = \bar{\partial}(\zeta \otimes \xi)$

只需验证度量相容：

$$\begin{aligned} d(\zeta \otimes \zeta', \xi \otimes \xi') &= (\zeta, \xi) \cdot d(\zeta', \xi') + (\zeta', \xi') \cdot d(\zeta, \xi) \\ &= (\zeta, \xi) \cdot \left[(D_{E'} \zeta', \xi') + (\zeta', D_{E'} \xi') \right] + (\zeta', \xi') \cdot \left[(D_E \zeta, \xi) + (\zeta, D_E \xi) \right] \\ &= \left((D_E \otimes 1 + 1 \otimes D_{E'})(\zeta \otimes \zeta'), \xi \otimes \xi' \right) + \left(\zeta \otimes \zeta', (D_E \otimes 1 + 1 \otimes D_{E'})(\xi \otimes \xi') \right) \end{aligned}$$

从而得到证明。 □

4.2.3 曲率

现在回到一般的情况。对于复向量丛 $E \to M$ 和其上的联络 D，可以将 D 延拓为一般的（$E-$ 取值）外微分形式上的算子。

定义 4.2.9 (共变外微分). 给定联络 D，定义

$$D : \mathscr{A}^p(E) \to \mathscr{A}^{p+1}(E)$$

通过再一次要求 Leibniz 律：

$$D(s \otimes \alpha) = Ds \wedge \alpha + s \otimes d\alpha$$

其中 s 是 E 的截面，α 是 $p-$ 形式。

其中 $\psi \in \mathscr{A}^p(E), \xi \in \mathscr{A}^0(E)$：这个定义完全只依赖于联络 $D : \mathscr{A}^0(E) \to \mathscr{A}^1(E)$ 的选取。

接下来考虑算子 $D^2 : \mathscr{A}^0(E) \to \mathscr{A}^2(E)$。对于 C^∞ 函数这个算子是线性的，因为：

$$D^2(f \cdot \sigma) = D(df \otimes \sigma + f \cdot D\sigma) = d^2 f \wedge \sigma - df \wedge D\sigma + df \wedge D\sigma + f \cdot D^2\sigma = f \cdot D^2\sigma$$

这样的线性性质保证我们可以得到比联络更简洁的结果。给定一组标架 $e = \{e_1, \cdots, e_n\}$，设 $D^2 e_i = \sum e_j \otimes \Theta^i_j$，其中 $\Theta_{ij} \in \mathscr{A}^2(M)$ 是 2− 形式。那么可以看到 D^2 的作用不过就是矩阵 $\Theta = (\Theta_{ij})$ 的右乘作用罢了。

由此，Θ 在标架变换 $e'_i = \sum g_{ij} e_j$ 的表现也更简洁：$\Theta_{e'} = g \cdot \Theta_e \cdot g^{-1}$。

另一方面，Θ 可以由联络矩阵 θ 显式地写出。

$$D^2 e_j = D(e_k \theta^k_j) = e_l \cdot \theta^l_k \wedge \theta^k_j + e_l \cdot d\theta^l_j$$

于是 $\Theta_e = d\theta_e + \theta_e \wedge \theta_e$：其中 d 是对每个分量求外微分，$\wedge$ 是按照普通矩阵乘法进行，只不过乘法变为外积。

定义 4.2.10 (曲率方阵). Θ_e 称为联络 D 在标架 e 下的曲率方阵，它由 2 形式 $\mathscr{A}^2(M)$ 中的元素组成。

恒等式 $\Theta_e = d\theta_e + \theta_e \wedge \theta_e$ 称为 Cartan 结构方程。

作为 Cartan 结构方程的推论立刻得到：

定理 4.2.11 (Bianchi 恒等式).

$$d\Theta_e = \Theta_e \wedge \theta_e - \theta_e \wedge \Theta_e$$

我们还有另外一个 Bianchi 恒等式的形式：

命题 4.2.12 (Bianchi 恒等式).

$$d^\nabla R = 0$$

这里由于 $R \in C^\infty(M, End(E) \otimes \wedge^2 T^* M)$，$d^\nabla$ 是 $End(E)$ 上的共变外微分。

证明. 现在对于 E 的截面，我们考虑 $E \otimes End(E)$ 的共变外微分：

$$\begin{aligned} d^\nabla(R(\alpha)) = d^\nabla < R, \alpha > &= < d^\nabla R, \alpha > + (-1)^2 < R, d^\nabla \alpha > \\ &= < d^\nabla R, \alpha > + R(d^\nabla \alpha) \end{aligned}$$

但是 $d^\nabla \circ R = d^{\nabla 3} = R \circ d^\nabla$，于是 $< d^\nabla R, \alpha >= 0, \forall \alpha$，因此 $d^\nabla R = 0$。 □

Chern 联络的曲率

接下来考虑全纯向量丛上的情况。如果 $E \to M$ 是 Hermitian 向量丛，联络 D 和复结构相容，那么 $D''^2 = \bar{\partial}^2 = 0$，因此 $\Theta^{(0,2)} = 0$（每个元素的 $(0,2)-$ 阶分量都是 0）

如果联络 D 还和度量相容，那么

$$
\begin{aligned}
\Theta &= d(H^{-1} \cdot \partial H) + (H^{-1} \cdot \partial H) \wedge (H^{-1} \cdot \partial H) \\
&= (\partial + \bar{\partial})(H^{-1} \cdot \partial H) + (H^{-1} \partial H) \wedge (H^{-1} \partial H) \\
&= \bar{\partial}(H^{-1} \cdot \partial H) + \partial H^{-1} \cdot \partial H + (H^{-1} \partial H) \wedge (H^{-1} \partial H) \\
&= \bar{\partial}(H^{-1} \cdot \partial H) - H^{-1} \cdot \partial H \wedge H^{-1} \partial H + (H^{-1} \partial H) \wedge (H^{-1} \partial H) \\
&= \bar{\partial}(H^{-1} \cdot \partial H) \\
&= \bar{\partial}\theta
\end{aligned}
$$

因此 Θ 由 $(1,1)-$ 形式组成，其中 H 是度量矩阵 $H = \{(e_i, e_j)\}$。

命题 4.2.13. *Chern 联络对应的曲率是由 $(1,1)$ 形式组成的。*

命题 4.2.14. *Chern 联络对应的曲率方阵在酉标架下是 Hermite 反对称的。*

证明. 这可以直接从联络方阵的（在酉标架下是 Hermite 反对称）性质得到。 □

命题 4.2.15. *Chern 联络对应的曲率方阵在张量积下的行为如下：*

$$\Theta_{E \otimes F} = \Theta_E \otimes 1_F + 1_E \otimes \Theta_F$$

证明. 只需考虑前文 Chern 联络在张量积下的行为，以及 Cartan 结构方程。

$$\Theta(s_1 \otimes s_2) = \theta(\theta(s_1 \otimes s_2)) = \theta(\theta_1(s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes \theta_2(s_2))$$

$$\theta(\theta_1(s_1) \otimes s_2) = \theta_1^2(s_1) \otimes s_2 + \theta_1(s_1) \wedge \theta_2(s_2)$$

同理也可以计算另一部分，两者相加即得到结果。

□

例子. 对于全纯线丛 $L \to M$，对于局部正取值函数 h，这给出了线丛上的局部度量，那么此时 *Chern* 联络诱导的曲率方阵是

$$\Theta = \bar{\partial}\theta = \bar{\partial}(h^{-1} \cdot \partial h) = \bar{\partial}\partial \log h$$

4.2.4 规范变换对联络的作用

定义 4.2.16 (自同构丛, 规范变换). 对于复向量丛 E, 定义自同构丛 $Aut(E) = \{\varphi \in End(E) = E \otimes E^* | \varphi_p : E_p \to E_p \ isomorphism\}$ 其截面 $C^\infty(M, Aut(E))$ 称为规范变换群。

规范变换群能够作用到 $C^\infty(M,E)$ 和全体 E 上联络构成的空间上。

前一个作用是显然的；后一个作用定义如下

$$\begin{aligned} C^\infty(M, Aut(E)) \times \mathscr{C}(E) &\to \mathscr{C}(E) \\ (\alpha, \nabla) &\mapsto \alpha \circ \nabla \circ \alpha^{-1} \end{aligned}$$

我们记这个像为 $\alpha(\nabla)$。

命题 4.2.17.

$$\alpha(\nabla) = \nabla - \nabla\alpha \cdot \alpha^{-1}$$

这里 $\alpha \in C^\infty(End(E))$，于是 $\nabla\alpha \in C^\infty(End(E) \otimes \wedge^1 E)$，从而这个式子确实有意义。

证明.

$$\begin{aligned} \alpha(\nabla)s &= \alpha \circ \nabla(\alpha^{-1} \circ s) \\ &= \alpha(\nabla\alpha^{-1}s + \alpha^{-1}\nabla s) \\ &= \alpha\nabla\alpha^{-1}s + \nabla s \end{aligned}$$

然而 $\nabla\alpha^{-1} = -\alpha^{-1}\nabla\alpha\alpha^{-1}$（这是对矩阵值求微分），这就得到了结果。 □

4.2.5 全纯切丛的联络

首先回忆前文定义 4.2.6，我们考虑复流形上的全纯切丛的 Chern 联络 D 的对偶 D^*。由于 $D^* : \mathscr{A}^{1,0} \to \mathscr{A}^{1,0} \otimes \mathscr{A}^1 = \mathscr{A}^{2,0} \oplus \mathscr{A}^{1,1}$

以及外微分算子

$d : \mathscr{A}^{1,0} \to \mathscr{A}^{2,0} \oplus \mathscr{A}^{1,1}$

自然可以比较这两个算子的行为：由于 D^* 与复结构相容，那么 $D^{*\prime\prime} = \bar{\partial}$，从而这两个算子在 $\mathscr{A}^{1,0} \to \mathscr{A}^{1,1}$ 这个分量上是一样的。

现在考虑 M 上的 Hermitian 度量 $ds^2 = \sum \varphi_i \otimes \overline{\varphi_i}$，很容易看出它实际上就是全纯切丛上的 Hermitian 度量。

定义 4.2.18 (挠率矩阵). 对于全纯切丛上的任一联络，都有挠率矩阵：设全纯切丛有局部标架 $S = (S_1, \cdots, S_m)^T$，以及全纯余切丛上的对偶标架 $\sigma = (\sigma^1, \cdots, \sigma^m)_{1\times m}$。

定义 $\tau = d\sigma - \sigma \wedge \theta$，其中 θ 是全纯切丛上联络 D 在局部标架 S 下的联络矩阵。

对于标架变换 $S' = A \cdot S$，余标架遵守 $\sigma' = \sigma \cdot A^{-1}$，即 $\sigma = \sigma' \cdot A$。两侧取外微分：

$$d\sigma = d\sigma' \cdot A - \sigma' \wedge dA$$

而由联络方阵的变换公式：$\theta' = dA \cdot A^{-1} + A \cdot \theta \cdot A^{-1}$，有

$$dA = \theta' \cdot A - A \cdot \theta$$

于是

$$
\begin{aligned}
d\sigma &= d\sigma' \cdot A - \sigma' \wedge (\theta' \cdot A) + \sigma' \wedge (A \cdot \theta) \\
&= (d\sigma' - \sigma' \wedge \theta')A + (\sigma \cdot A^{-1}) \wedge (A \cdot \theta) \\
&= (d\sigma' - \sigma' \wedge \theta')A + \sigma \wedge \theta
\end{aligned}
$$

因此 $\tau = \tau' \cdot A$。

我们自然想问当 D 是 Chern 联络时 τ 如何，如下结果给出了回答。

定理 4.2.19. 对于全纯切丛给定了 *Hermitian* 度量的流形 M，D 是全纯切丛的 $(1,0)-$ 型联络当且仅当挠率矩阵由 $(2,0)-$ 型微分式组成。

证明. 同样，考虑全纯标架的对偶余标架 σ，每个 σ 都是 $(1,0)-$ 型的。因此 $\bar{\partial}\sigma = 0$。

联络矩阵 θ 按 $(1,0)-$ 型和 $(0,1)-$ 型可以唯一地分解为 $\theta = \theta_1 + \theta_2$，那么挠率矩阵 $\tau = d\sigma - \sigma \wedge \theta = (\partial\sigma - \sigma \wedge \theta_1) - \sigma \wedge \theta_2$

因此 τ 已经被分解为 $(2,0)-$ 形式和 $(1,1)-$ 形式的和。即 τ 由 $(2,0)$ 形式组成 $\iff \sigma \wedge \theta_2 = 0$

设 $\theta_2 = (\theta_j^k)$，那么 $\sigma^j \wedge \theta_j^k = 0$。由外微分式的 Cartan 引理，这等价于要求每个 θ_j^k 都是 σ^i 的光滑函数系数线性组合。

但是 σ^j 是 $(1,0)$ 型的，θ_j^k 是 $(0,1)$ 型的，于是这只能等价于 $\theta_2 = 0$，即 θ 是 $(1,0)$ 型的。 □

注记. 考察这个判定，它能够有效是因为 τ 的 $(,)$ 型不因标架的光滑变换而改变，这说明在研究这样的流形是取光滑标架也是可以容许的。

注记. 回忆前文对 Chern 联络的讨论，复结构相容性正等价于其联络矩阵在全纯标架下是 $(1,0)-$ 型的。而度量相容性可以由其在酉标架下的联络矩阵是反 Hermitian 的保证。

现在保持本节记号不变，考虑 $T'^*(M)$ 上由 $T'(M)$ 的度量诱导的的对偶度量，那么自然有酉标架 $\{\varphi_i\}$。另一方面 $T'(M)$ 自身上的酉标架正是 $\{\varphi_i\}$ 的对偶标架，记为 $\{v_i\}$。

考虑两个 Chern 联络 D, D^*，以及它们在对应酉标架下的联络矩阵 θ, θ^*。

本段落暂时遗弃，见 Gauss 曲率。

由此我们称（赋予 Hermite 度量的）切丛上的唯一的 Chern 联络为 Hermite 联络，它一定有 $(2,0)-$ 型挠率。之前的结果已经指出曲率是 $(1,1)-$ 型的。

特别地，当挠率矩阵为 0 时，称流形上的度量为 Kahler 度量，这部分内容将在后面章节讨论。

4.2.6 与古典微分几何的联系

Gauss 曲率

给定一个 Riemann 面 M，一个局部坐标 z，那么 M 上的一个度量（全纯切丛上的 Hermite 度量）由 $ds^2 = h^2 dz \otimes \overline{dz} = \varphi \otimes \varphi$ 给出，$\varphi = hdz$

容易得到 $\Theta = \bar{\partial}\partial(\log h)$。

总之结果就是 $\sqrt{-1}\Theta = K \cdot \Phi$，其中 Φ 是度量的关联 $(1,1)-$ 形式，K 正是古典微分几何中的 Gauss 曲率。部分讨论见 [Che01, Chapter 4, Section 2]

由于已经计算过 $\Theta = \bar{\partial}(H^{-1} \cdot \partial H)$，注意右侧实际上是 $\bar{\partial}\partial \log \det H$。更一般地，在 Kahler 流形的情况下，利用这个关系我们有 Kahler 度量和 Ricci 曲率之间的更一般的结果，见命题 8.1.3。

第五章 Riemann 几何

5.1 Riemann 几何

定义 5.1.1 (Riemann 度量). 对于实流形，$g \in C^\infty(M, T^*M \otimes T^*M)$ 称为 Riemann 度量，如果对于每个 $p \in M$，g_p 都诱导了对称正定双线性形式。

定理 5.1.2 (Riemann 几何基本定理：Levi-Civita 联络). *对于 Riemann 流形 (M, g)，存在唯一的切丛 TM 上的联络 ∇，使得*

1. *(无挠). 对于任何两个切向量场，*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

2. *(度量相容). 对于任何三个切向量场，*

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

这个唯一的联络称为 (Christoffel-)Levi-Civita 联络。

证明. 假定有这样的联络 ∇，那么对度量相容性的条件轮换三个切向量场 X, Y, Z，轮换后加减，就得到

$$Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) = g(Z, \nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) + g([Y, Z], X) + g([X, Z], Y)$$

$$= g(2\nabla_X Y, Z) - g([X, Y], Z) + g([Y, Z], X) + g([X, Z], Y)$$

即：

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}(Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) - g([X, Z], Y))$$

因此我们可以用这一关系式定义 $\nabla_X Y$，这就说明了唯一性。

接下来我们验证这样定义的联络确实是一个满足要求的联络。首先线性性显然，为验证它确实是联络只需验证 Leibniz 律：

$$
\begin{aligned}
&g(\nabla_X fY, Z)\\
&= \frac{1}{2}(X(f\cdot f(Y,Z)) + f\cdot Y(g(Z,X)) - Z(f\cdot g(X,Y))\\
&+g([X, f\cdot Y], Z) - g([f\cdot Y, Z], X) - f\cdot g([X,Z],Y))\\
&= \frac{1}{2}[X(f)\cdot g(Y,Z) + f\cdot X(g(Y,Z)) + f\cdot Y(g(Z,X)) - Z(f)\cdot g(X,Y) - f\cdot Z(g(X,Y))\\
&+g(Z, X(f)\cdot Y + f\cdot [X,Y]) + f\cdot g(Y,[Z,X]) - g(X, -Z(f)\cdot Y + f\cdot [Y,Z])]\\
&= X(f)\cdot g(Y,Z) + f\cdot g(\nabla_X Y, Z) = g(X(f)\cdot Y + f\cdot \nabla_X Y, Z)
\end{aligned}
$$

这说明它确实是联络。由定义

$$g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) = g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) = g([X,Y],Z)$$

因此这说明了无挠。

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = Xg(Y,Z)$$

因此这说明了度量相容。 □

注记. 注意由求导法则 $X(g(Y,Z)) = \nabla_X g(Y,Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$，因此度量相容条件实际上是指 $\nabla_X g = 0, \forall X$。

现在我们计算在 $\partial/\partial x^i$ 这个局部标架下的联络矩阵。由于 $[\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j] = 0$，因此

$$g(\nabla_{\partial/\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})$$

于是如果我们假设

$$\nabla_{\partial/\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^l_{ij}\frac{\partial}{\partial x^l}$$

前述等式左端就为 $\Gamma^l_{ij} g_{lk}$，于是代入即有：

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}g^{lk}(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})$$

同时联络矩阵就是 $\omega^l_j = \Gamma^l_{ij} dx^i$。

现在给定了 Levi-Civita 联络，我们自然有曲率张量 $R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$，它和 $d\omega + \omega\wedge\omega$ 的定义是相符的。

现在定义 Riemann 曲率张量：

定义 5.1.3 (Riemann 曲率张量). 定义 $R \in C^\infty(\otimes^4 T^*M)$

$$R(X,Y,Z,W) = g(Z, R(X,Y)W)$$

命题 5.1.4. *Riemann 曲率张量 R 满足：*

1. *对前两项反对称：$R(Y,X,Z,W) = -R(X,Y,Z,W)$*
2. *对前半部和后半部对称：$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$*

3. *Bianchi* 第一恒等式：$R(X,Y,Z,W)+R(Y,W,Z,X)+R(W,X,Z,Y)=0$

4. *(Bianchi* 第一恒等式的等价形式*)*：$R(X,Y)Z+R(Z,X)Y+R(Y,Z)X=0$

5. *Bianchi* 第二恒等式：$(\nabla_X R)(Y,Z,-,-)+(\nabla_Y R)(Z,X,-,-)+(\nabla_Z R)(X,Y,-,-)=0$

   这里将 R 视作 $\otimes^4 T^*M$ 中的元素，如同共变外微分那样，E 中的联络可以延拓成为 $\otimes^p E \otimes^q E^*$ 的联络。事实上这个恒等式和 $d^\nabla R=0$ 等价。

证明. 1.

由于 $R(X,Y)=-R(Y,X)$，于是 $R(Y,X,Z,W)=-R(X,Y,Z,W)$。

2.

我们首先证明 $R(X,Y,Z,W)=-R(X,Y,W,Z)$。由极化恒等式，这只需说明 $g(Z,R(X,Y)Z)=0$，但是

$$g(Z,R(X,Y)Z)=g(Z,\nabla_X\nabla_Y Z)-g(Z,\nabla_Y\nabla_X Z)-g(\nabla_{[X,Y]}Z,Z)$$

$$=Xg(\nabla_Y Z,Z)-g(\nabla_X Z,\nabla_Y Z)-Yg(\nabla_X,Z)+g(\nabla_X Z,\nabla_Y Z)-\frac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z)$$

$$=\frac{1}{2}[XYg(Z,Z)-YXg(Z,Z)-[X,Y]g(Z,Z)]$$

但是在作用到标量场上时，$[X,Y]f=(XY-YX)f$，这就说明了 $R(X,Y,Z,W)=-R(X,Y,W,Z)$。

现在由 3.，结合 1. 知我们固定四个切向量场的任何一个，对剩余三个切向量轮换求和都为 0，于是：

$$R(X,Y,Z,W)=-R(Z,X,Y,W)-R(Y,Z,X,W)$$

$$=R(Z,X,W,Y)+R(Y,Z,W,X)$$

$$=-R(W,Z,X,Y)-R(X,W,Z,Y)-R(Z,W,Y,X)-R(W,Y,Z,X)$$

$$=2R(Z,W,X,Y)+R(Y,X,Z,W)$$

$$=2R(Z,W,X,Y)-R(X,Y,Z,W)$$

这就说明了 $R(X,Y,Z,W)=R(Z,W,X,Y)$。

3.

只需证明 $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$。这是因为

$$\sum_{cyc.}R(X,Y)Z=\sum_{cyc.}(\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z)$$

$$=\sum_{cyc.}\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_X\nabla_Z Y-\nabla_{[Y,Z]}X$$

$$=\sum_{cyc.}\nabla_X[Y,Z]-\nabla_{[Y,Z]}X$$

$$=\sum_{cyc.}[X,[Y,Z]]=0$$

4.

我们考虑配对 $\otimes^4 T^*M \otimes TM \otimes TM \otimes TM \otimes TM$ 上的诱导联络。我们接下来始终省略轮换求和记号：

$$\begin{aligned} X(R(Y,Z,T_1,T_2)) &= (\nabla_X R)(Y,Z,T_1,T_2) + R(\nabla_X Y, Z, T_1, T_2) \\ &+ R(Y,\nabla_X Z, T_1, T_2) + R(Y,Z,\nabla_X T_1, T_2) + R(Y,Z,T_1,\nabla_X T_2) \end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned} X(R(Y,Z,T_1,T_2)) = X(g(T_1,R(Y,Z)T_2)) &= g(\nabla_X T_1, R(Y,Z)T_2) \\ &+ g(T_1, \nabla_X(R(Y,Z)T_2)) \\ = R(Y,Z,\nabla_X T_1,T_2) + g(T_1,(\nabla_X R)(Y,Z)T_2) &+ g(T_1,R(\nabla_X Y,Z)T_2) \\ + g(T_1,R(Y,\nabla_X Z)T_2) &+ g(T_1,R(X,Y)\nabla_X T_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = R(\nabla_X Y, Z, T_1, T_2) &+ R(Y,\nabla_X Z,T_1,T_2) + R(Y,Z,\nabla_X T_1,T_2) \\ &+ R(Y,Z,T_1,\nabla_X T_2) + g(T_1,(\nabla_X R)(Y,Z)T_2) \end{aligned}$$

因此只需证明 $(\nabla_X R)(Y,Z)T_2 = 0$。再一次地我们考虑配对 $E = [End(E) \wedge^2 T^*M] \otimes TM \otimes TM \otimes E$ 上的联络，于是

$$(\nabla_X R)(Y,Z)T_2 = \nabla_X(R(Y,Z)T_2) - R(\nabla_X Y, Z)T_2 - R(Y,\nabla_X Z)T_2 - R(Y,Z)\nabla_X T_2$$

$$\begin{aligned} &(\cancel{\nabla_X\nabla_Y\nabla_Z - \nabla_X\nabla_Z\nabla_Y} - \nabla_X\nabla_{[Y,Z]} \\ &-\nabla_{\nabla_X Y}\nabla_Z + \nabla_Z\nabla_{\nabla_X Y} + \nabla_{[\nabla_X Y,Z]} \\ &-\nabla_Y\nabla_{\nabla_X Z} + \nabla_{\nabla_X Z}\nabla_Y + \nabla_{[Y,\nabla_X Z]} \\ &\cancel{-\nabla_Y\nabla_Z\nabla_X + \nabla_Z\nabla_Y\nabla_X} + \nabla_{[Y,Z]}\nabla_X)T_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = (\cancel{\nabla_Z\nabla_{[X,Y]} - \nabla_{[X,Y]}\nabla_Z - \nabla_X\nabla_{[Y,Z]} + \nabla_{[Y,Z]}\nabla_X} + \nabla_{[\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z]})T_2 \\ = \nabla_{[[X,Y],Z]}T_2 \end{aligned}$$

再一次由 $\sum[[X,Y],Z] = 0$，我们得到了结果。 □

定义 5.1.5 (截面曲率). X,Y 是 T_pM 上的标准正交向量（即 $||X|| = ||Y|| = 1, g(X,Y) = 0$），定义

$$R(X,Y,X,Y)$$

为 p 点处 X,Y 张成平面的截面曲率。

注意截面曲率仅和平面有关，即如果选取 $X' = \cos\theta \cdot X - \sin\theta \cdot Y, Y' = \cos\theta \cdot X + \sin\theta \cdot Y$，那么截面曲率不变：

$$R(X',Y',X',Y') = R(X,Y,X,Y)$$

注记. 回到古典的情况，对于嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 M，其上有着 $\mathbb{R}^3$ 诱导的 Riemann 结构，于是有着 Levi-Civita 联络（这正是古典曲线曲面论中出现的情况）这个时候的截面曲率（由于切空间是 2 维的必然唯一：$R(e_1,e_2,e_1,e_2)$）正是曲面的 Gauss 曲率。

定义 5.1.6 (Ricci 曲率). 给定 $T_p(M)$ 上的一组标准正交基 $e_1, \cdots, e_n$，那么定义 Ricci 曲率张量（$C^\infty(M, \otimes^2 T^*M)$）为：

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} R(X, e_i, Y, e_i)$$

通过计算验证这是良定义的，并且 R 是一个对称张量。

注记. Ricci 曲率事实上反应了流形 M 的拓扑性质（Bochner 定理 e.g.）。R.Hamilton 考虑了所谓的 Ricci 流：即一族连续变动的 Riemann 度量 $g(t)$ 使得

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t))$$

这一工具最终证明了 Poincare 猜想。

在 Kahler 流形中，Ricci 形式和线丛的第一 Chern 类系数相同，见命题 8.1.3

定义 5.1.7 (标量曲率). 定义 $Scal \in C^\infty(M)$ 为：

$$Scal = \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i, e_i) = \sum_{i,j=1}^{n} R(e_i, e_j, e_i, e_j)$$

它称为关于度量 g 的标量曲率。

如果 $\dim M = 2$,那么 $Scal = R(e_1, e_2, e_1, e_2) + R(e_2, e_1, e_2, e_1) = 2Ric(e_1, e_1) = 2Ric(e_2, e_2) = 2R_{sectional}$。

注记. 如果标量曲率是处处正的，我们有对 Stiefel-Whitney 数的描述；如同 Ricci 曲率一样，标量曲率仍然反应了流形 M 的拓扑性质。

定义 5.1.8 (Einstein 度量). 称 Riemann 度量是 Einstein 度量，如果 $Ric = \lambda g$（准确地说是 $Ric_{ij} = \lambda g_{ij}$（注意 Ric, g 都是对称张量），这是一个 2 阶 PDE，称为 Einstein 场方程（其名称来源是广义相对论）。

5.2 Riemann 流形上的微积分

定义 5.2.1 (体积元). (M, g) 是 Riemann 流形，对于一组局部坐标 $x^1, \cdots, x^n$，定义 $dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots dx^n$。容易验证这在转移函数下不变，因此成为全局定义的微分形式，称为体积元。

定义 5.2.2. 给定向量场 X，其散度定义为 $\operatorname{div}(X) = \nabla_i X^i = \dfrac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ik} X^k$

特别地：在一点 p 处，可以取定一个局部坐标使得 Γ^k_{ij}=0：称为测地坐标。

定理 5.2.3 (散度定理).

$$\int_M div(X) dV_g = 0$$

证明. 这是因为 $div(X)dV_g = d(\iota_X dV_g)$，那么 Stokes 定理就给出了结果。 □

定理 5.2.4 (音乐同构). 假定固定好度量矩阵 (g_{ij})，其逆矩阵为 g^{ij}。

对于切向量场 T，其各分量为 T_i，那么取 $T^i = g^{ij}T_j$，设得到的余切向量场为 $T^\sharp$，那么就得到了同态：

$$\sharp : T_pM \to T_p^*M : T \mapsto T^\sharp$$

反过来对于余切向量场 T，各分量 T^i，定义 $T_i = g_{ij}T^j$，这就给出了

$$\flat : T_p^*M \to T_pM : T \mapsto T_\flat$$

进一步，$\sharp,\flat$ 给出了 TM 和 T^*M 之间的纤维丛同构。

利用上述同构，我们可以把联络也转移到余切丛上：

定义 5.2.5.

$$\nabla^i T_j \coloneqq g^{ik}\nabla_k T_j$$

$$\nabla^i T^j \coloneqq g^{ik}\nabla_k T^j$$

现在由于 $\nabla g = 0$，$\nabla g^{-1} = 0$，于是

$$\nabla_i(T^j) = \nabla_i(g^{ik}T_k) = g^{ik}\nabla_i T_k$$

因此度量相容性保证了可以将矩阵提进提出。

最后指出：对于高阶张量场，我们也可以做类似操作：

$$T^i_{j_1\cdots j_p} \coloneqq g^{ik}T_{kj_1\cdots j_p}$$

我们来看一些有用的结果。

命题 5.2.6 (分部积分).
$$\int_M T^i \cdot \nabla_i f dV_g = -\int_M \nabla_i T^i f dV_g$$

证明.
$$\int_M T^i \cdot \nabla_i f dV_g = \int_M \nabla_i(T^i f) - (\nabla_i T^i) f dV_g$$
第一项 $\nabla_i(T^i f)$ 正是散度 $div(fT)$，因此积分后是零，于是这就说明了结果。 □

定义 5.2.7 (几何 Laplacian). 对于 $f \in C^\infty M$

$$\Delta f \coloneqq -\nabla^i\nabla_i f$$

注意由于 g, g^{-1} 可以提进提出，上式等价于 $-\nabla_i\nabla^i f$：后者是 $-\nabla_i g^{ik}\nabla_k f = -g^{ik}\nabla_i\nabla_k f = -\nabla^k\nabla_k f$，同时我们还可以看出在标准度量下这就退化成为欧式空间上的标准 Laplacian（只不过携带了一个符号）

特别地，在正规坐标下

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i}$$

命题 5.2.8 (Laplacian 的散度定理).

$$\int_M \Delta f dV_g = 0$$

证明. Δf 不过是散度 $div(\nabla^i f \cdot \frac{\partial}{\partial x^i})$，因此散度定理立刻说明了结果。 □

定理 5.2.9 (Laplacian 是正算子). 对于 Δ 的特征值 λ: $\Delta f = \lambda f$, 那么 $\lambda \geq 0$, 并且 $\lambda = 0 \iff f$ 是常数。

证明. 考虑 L^2 内积:

$$\begin{aligned}(\Delta f, f) &= \int_M -\nabla_i \nabla^i f \cdot f dV_g \\ &= \int_M \nabla^i f \cdot \nabla_i f dV_g = \int g^{ij} \nabla_j f \cdot \nabla_i f \\ &= \int_M ||df|_{L^2}^2 \geq 0\end{aligned}$$

□

特别地，如果 $g = \Delta f$，那么 $\int_g = 0$，这是 Hodge 分解的前兆。

第六章 紧复流形上的 Hodge 理论

6.1 Hodge 定理的动机与陈述

对于一个连通紧致的 n 维复流形 M，其上的 Hermitian 度量 ds^2 诱导出了关联 $(1,1)-$ 形式 $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum \varphi_j \wedge \bar{\varphi}_j$，其中 $\{\varphi_i\}$ 是酉标架。

这个度量诱导出了 $T^{*(p,q)}(M)$ 上的度量：令 $\{\varphi_I \wedge \bar{\varphi}_J\}_{\#I=p,\#J=q}$ 为一组酉标架，并且取 $||\varphi_I \wedge \bar{\varphi}_J||^2 = 2^{p+q}$。由定理 2.4.2，此时体积元为 $\Phi = \frac{\bigwedge^n \omega}{n!} = (-1)^{n(n-1)/2}(\sqrt{-1}/2)^n \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \wedge \bar{\varphi}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\varphi}_n$。

现在考虑空间 $A^{p,q}(M)$（(p,q)- 阶外形式空间），其上有内积：

$$(\psi, \eta) = \int_M (\psi(z), \eta(z))_z \Phi$$

可以验证它使得 $A^{p,q}$ 成为了预 Hilbert 空间（不要求完备的内积空间）。

Hodge 定理的主要动机是，对于一个 $\psi \in Z^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$，其所在的 Dolbeault 同调类为 $\psi + \partial\eta$，我们希望找到这个同调类中范数最小的元素。

接下来的一个段落是非正式的计算（我们假装 $A^{(p,q)}$ 是完备的，并且 $\bar{\partial}$ 算子是有界的）。

定义伴随算子

$$\bar{\partial}^* : A^{p,q} \to A^{p,q-1}$$

使得

$$(\bar{\partial}^*\psi, \eta) = (\psi, \bar{\partial}\eta)$$

总成立。这个定义是否合理有待于对伴随算子的考察，但是唯一性是显然的。有关存在性的论述将放在后面。下面假定这个算子是良好定义的，那么有

引理 6.1.1. *一个 $\bar{\partial}$ 闭形式 $\psi \in Z^{p,q}_{\bar{\partial}}$ 在所处的 Dolbeault 同调类中是范数最小的当且仅当 $\bar{\partial}^*\psi = 0$*

证明. 如果 $\bar{\partial}^*\psi = 0$，那么

$$||\psi + \bar{\partial}\eta||^2 = ||\psi||^2 + ||\bar{\partial}\eta||^2 + 2\mathrm{Re}(\psi, \bar{\partial}\eta) = ||\psi||^2 + ||\bar{\partial}\eta||^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{\partial}^*\psi, \eta)$$

$$= ||\psi||^2 + ||\bar{\partial}\eta||^2 > ||\psi||^2$$

反过来，如果 $||\psi||$ 是最小的，那么 $\frac{\partial}{\partial t}||\psi + \bar{\partial}(t\cdot\eta)||^2\Big|_{t=0} = 0$，对 t 沿实轴和虚轴分别展开知 $(\psi, \bar{\partial}\eta) = 0$，于是 $(\bar{\partial}^*\psi, \eta) = 0$，由于 η 选取任意，于是 $\bar{\partial}^*\psi = 0$。 □

注意在失去完备和有界的假定下，这个引理当然没有理由正确。例如完备性的丧失导致求导不再有意义。

这个引理告诉我们，在“形式”上，我们可以选取 $H_{\bar\partial}^{p,q}(M)$ 的代表元为方程组 $\begin{cases}\bar\partial\psi=0\\ \bar\partial^*\psi=0\end{cases}$ 的解。

定义 6.1.2 ($\bar\partial$-Laplacian)**.** 定义 $\Delta_{\bar\partial}=\bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial\,(=(\bar\partial+\bar\partial^*)^2)$：最后一个等号是因为 $\bar\partial^{*2}=0$，尽管我们现在还没有严格说明这件事。

首先很显然的满足方程组的 ψ 当然满足 $\Delta\psi=0$，反过来如果 $\Delta\psi=0$，那么 $(\Delta\psi,\psi)=(\bar\partial\bar\partial^*\psi,\psi)+(\bar\partial^*\bar\partial\psi,\psi)=||\bar\partial\psi||^2+||\bar\partial^*\psi||^2$。因此 $\bar\partial\psi=\bar\partial^*\psi=0$。即方程组可以转化为 Laplace 方程 $\Delta\psi=0$。

称 Laplace 方程的解为调和形式，全体 (p,q)- 调和形式构成的空间为 $\mathcal{H}^{p,q}(M)$ 称为调和空间。之前的引理“证明”了 $\mathcal{H}^{p,q}\cong H_{\bar\partial}^{p,q}$，而这个结果的严格论述正是 Hodge 定理的内容。

$\bar\partial^*$ 算子

我们首先从这个还没有被严格定义的伴随算子开始。

定义 6.1.3 (星算子)**.** $*:A^{p,q}\to A^{n-p,n-q}$，满足对于 $\eta\in A^{p,q}$：

$$(\psi,\eta)\Phi=\psi\wedge*\eta,\forall\psi\in A^{p,q}$$

其中 Φ 是体积元。

首先这个算子是唯一定义的，因为如果某个 $(n-p,n-q)$- 外微分式和任意 (p,q)- 外微分式作楔积的结果都是 0，那么它一定是 0.（这是基本的代数结果，因为考虑 $\sum dz_I\wedge d\bar z_J,\wedge$ 上对应分量的补就能提取出分量系数）

存在性由下式给出，对于

$$\eta=\sum\eta_{I\bar J}\varphi_I\wedge\bar\varphi_J$$

（这里 $\varphi_i,\bar\varphi_i$ 是 Hermitian 度量对应的酉标架）定义

$$*\eta=2^{p+q-n}\sum\epsilon_{IJ}\bar\eta_{I\bar J}\varphi_{I^0}\wedge\bar\varphi_{J^0}$$

其中 $I^0=\{1,\cdots,n\}-I$，ϵ_{IJ} 为置换

$$(1_i,\cdots,n_i,1_j,\cdots,n_j)\mapsto(i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q,i_1^0,\cdots,i_p^0,j_1^0,\cdots,j_q^0)$$

的符号。

验证它满足要求只需考虑 ψ 为 $A^{n-p,n-q}$ 一个基 $\varphi_{\{1,\cdots,n\}-I'}\wedge\bar\varphi_{\{1,\cdots,n\}-J'}$ 的情况，这个验证是简单而直截了当的。

另一方面，很容易验证 $**=(-1)^{p+q}$。

现在定义 $\bar\partial^*=-*\bar\partial*$，对于 $\psi\in A^{p,q-1},\eta\in A^{p,q}$ 我们来验证它满足要求：

$$(\bar\partial\psi,\eta)=\int_M\bar\partial\psi\wedge*\eta=(-1)^{p+q}\int_M\psi\wedge\bar\partial*\eta+\int_M\bar\partial(\psi\wedge*\eta)$$

然而 $\psi \wedge *\eta$ 是 $(n,n-1)$- 的，此时 $\bar\partial = d$。于是由 Stokes 定理，它就是 0。

因此

$$(\bar\partial\psi,\eta) = -\int_M \psi \wedge **\bar\partial*\eta = -\int_M \psi\wedge *\bar\partial^*\eta = (\psi,\bar\partial\eta)$$

推论 6.1.4. $\bar\partial^{*2}=0$。

注记. 如果我们将微分形式换为紧支微分形式，上述所有讨论都可对任意复流形进行。这时对于 $M=\mathbb{C}^n$，$f\in A_c^{0,0}(M)$，$\Delta(f)$ 就是普通的 Laplace 算符，我们将会看到对于 Kahler 流形也有类似的结果成立。

Hodge 定理

定理 6.1.5 (Hodge 定理)**.**

1. $\dim \mathcal{H}^{p,q}<\infty$

2. *正交投影 $\mathcal{H}: A^{p,q}\to\mathcal{H}^{p,q}$ 由于 1 成立是良定义的（有限维线性子空间是闭子空间，于是正交补良定义）。存在唯一一个算子 $G: A^{p,q}\to A^{p,q}$，称为 Green 算子，满足：*

$$G(\mathcal{H}^{p,q})=0;\bar\partial G = G\bar\partial;\bar\partial^* G = G\bar\partial^*;\mathcal{H}+\Delta G=\mathrm{id}$$

更进一步，G 是有界且紧的。

立刻得到的推论是 $\mathcal{H}^{p,q}(M)\cong H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$。

最后一式表明 $\psi=\mathcal{H}(\psi)+\bar\partial(\bar\partial^*G\psi)+\bar\partial^*(\bar\partial G\psi)$ ，但是：

$$\begin{cases}\bar\partial\psi=0\\ \bar\partial^*\psi=0\\ \psi=\bar\partial\eta\end{cases} \implies (\psi,\psi)=(\bar\partial\eta,\psi)=(\eta,\bar\partial^*\psi)=0$$

$$\begin{cases}\bar\partial\psi=0\\ \bar\partial^*\psi=0\\ \psi=\bar\partial^*\eta\end{cases} \implies (\psi,\psi)=(\psi,\bar\partial^*\eta)=(\bar\partial\psi,\eta)=0$$

$$\begin{cases}\psi=\bar\partial\eta\\ \psi=\bar\partial^*\eta'\end{cases} \implies (\psi,\psi)=(\bar\partial\eta,\bar\partial^*\eta)=(\eta,\bar\partial^{*2}\eta)=0$$

因此线性代数的结果指出有直和分解：$A^{p,q}=\mathcal{H}^{p,q}\oplus\bar\partial A^{p,q-1}\oplus\bar\partial^*A^{p,q+1}$

另外：

$$\begin{cases}\bar\partial\psi=0\\ \bar\partial^*\psi=0\\ \psi=(\bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial)\eta\end{cases} \implies (\psi,\psi)=(\bar\partial\bar\partial^*\psi,\psi)+(\bar\partial^*\bar\partial\psi,\psi)=||\bar\partial\psi||^2+||\bar\partial^*\psi||^2=0$$

于是定理 6.1.5的第二条结果还说明了给定 η，$\Delta\psi=\eta$ 有解当且仅当 $\mathcal{H}(\eta)=0$，即存在直和分解 $A^{p,q}=\mathcal{H}^{p,q}\oplus\Delta(A^{p,q})$。另外，$\psi=G\eta$ 是在方程的所有解中唯一满足 $\mathcal{H}(\psi)=0$ 的。唯一性由直和分解是简单的，只需验证 $G\eta$ 满足要求。由于 $\mathcal{H}=\mathrm{id}-\Delta G$，$\mathcal{H}(G\eta)=G\eta-\Delta\circ G\circ G\eta = G\eta-G[\Delta(G\eta)]=G\eta-G\eta=0$。

注记. 可以看到，Hodge 定理可以毫无困难地修改为对于 d 算子和 Riemann 流形上的情况。并且也不难看出接下来的证明在这一情况下也能够奏效。

6.2 Hodge 定理的证明

我们直接证明更一般版本的 Hodge 定理，这个推广版本的 Hodge 定理指出我们不仅仅可以考虑复值的外微分式，这个定理对全纯线丛，乃至全纯向量丛都成立。为了叙述方便现在只考虑全纯线丛的地方，但可以看出接下来的证明中线丛和向量丛没有任何本质上的区别，证明过程可以毫无困难地进行推广。

现在和前文一样，固定紧复流形 M 上的 Hermitian 度量，以及全纯线丛 L 上的 Hermitian 度量。同样地，这定义了 $L-$ 值微分形式 $A^{p,q}(L)$ 上的内积，它再一次成为了预 Hilbert 空间。$\bar\partial$ 算子的定义如定义 4.1.7所述。现在考虑线丛上的 Hermitian 联络 D，并将其延展到整个外代数 $A(L)$ 上，这时 $D''=\bar\partial$，于是我们可仿照前文定义星算子，伴随算子 $\vartheta=-*\bar\partial*$，当然也有 Laplace 算子（这里记为 $\square$）。

注意：$\square=(\bar\partial+\vartheta)^2$，容易验证它是自伴的。

前文的一切讨论都可以毫无困难地推广到这一情况。

现在我们重述 Hodge 定理如下：

定理 6.2.1 (全纯线丛的 Hodge 定理).

设 M 是紧复流形，L 是全纯线丛。现在固定 M 和 L 上的 Hermitian 度量，按前文定义出若干算子。那么：

1. $\dim\mathcal{H}^{p,q}<\infty$

2. 正交投影 $\mathcal{H}:A^{p,q}\to\mathcal{H}^{p,q}$ 由于 1 成立是良定义的（有限维线性子空间是闭子空间，于是正交补良定义）。存在唯一一个算子 $G:A^{p,q}\to A^{p,q}$，称为 Green 算子，满足：

$$G(\mathcal{H}^{p,q})=0;\bar\partial G=G\bar\partial;\bar\partial^*G=G\bar\partial^*;\mathcal{H}+\square G=\mathrm{id}$$

更进一步，G 是有界且紧的。

6.2.1 Sobolev 空间

首先从 $\mathbb{R}^n$ 中开集 Ω 上的 Sobolev 空间开始，我们考虑的都是复值函数。

定义 $A_s(\Omega)=\{f\in C^\infty(\Omega)||f|_s^2<\infty\}$

这里范数 $|f|_s^2=\sum\limits_{|\alpha|\le s}\int_\Omega|D^\alpha f|^2dx$。其中求和式中 D^α 指 α- 混合偏导数，并对总次数不超过 s 的所有 α 求和。

自然，这个范数可由内积 $(f,g)_s=\sum\limits_{|\alpha|\le s}\int_\Omega(D^\alpha f)\overline{(D^\alpha g)}dx$ 诱导，并且 Schwartz 不等式成立。

于是 $A_s(\Omega)$ 在这范数和内积下成为预 Hilbert 空间，并且有 $|\cdot|_t\le|\cdot|_s\quad\forall t\le s$。

定义 6.2.2 (Sobolev 空间). 称 $A_s(\Omega)$ 按范数 $|\cdot|_s$ 的完备化为 Sobolev 空间 $H_s(\Omega)$。对于紧支空间 $A_s(\Omega)\cap C_c^\infty$，其完备化记为 $\mathring{H}_s(\Omega)$。

它们都是 Hilbert 空间，并且 $\mathring{H}_s(\Omega)\subseteq H_s(\Omega)$

我们接下来将看到这里定义的 Sobolev 空间是一个特例，在后文将会看到 H_s 正是所谓 $W^{2,s}$ 空间，从而给出一个等价的 Sobolev 空间定义。首先指出的是 $H_0(\Omega)=\mathring{H}_0(\Omega)=L^2(\Omega)$，这个结果在任何实分析的教材内均可找到。e.g.[PMF14, Chapter 7]

首先引入弱导数的概念：

定义 6.2.3 (弱导数). 对于 $f \in H_0(\Omega)$，如果 $h^\alpha \in H_0(\Omega)$ 使得对于任何 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$，都有

$$(f, D^\alpha \varphi)_0 = (-1)^{|\alpha|}(h^\alpha, \varphi)_0$$

那么称 h^α 是 f 的 α 阶弱导数，记为 $D^\alpha f = h \quad (weak)$

注记. 弱导数如果存在，则在相差零测集的意义上是唯一的。这是因为 $(h^\alpha - h^{\alpha'}, \varphi)_0 = 0$，即 $\int_\Omega (h^\alpha - h^{\alpha'})\bar{\varphi} = 0$ 对任何 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ 成立。于是自然 $h^\alpha - h^{\alpha'} = 0, a.e.$，于是弱导数在 L^2 空间中是唯一的。

自然，对于光滑函数，弱导数毫无例外地退化成为正常的导数。这是因为我们在定义弱导数时就形式地取用了分部积分得到的结果。同样也可以直接验证弱导数的运算法则和普通导数无异。

命题 6.2.4 (弱导数的存在性). 对于 $f \in H_s(\Omega)$，$\forall \alpha s.t. |\alpha| \le s$，$D^\alpha f \quad (weak)$ 都存在。(注意 $H_s \subseteq H_0$)

证明. 由完备化的定义，存在 $\{f_i\} \in A_s(\Omega)$，$|f_i - f|_s \to 0$，于是 $\{f_i\}$ 在 $|\cdot|_s$ 下是 Cauchy 列，从而 $\{D^\alpha f_i\}$ 在 $|\cdot|_0$ 下是 Cauchy 列 (因为 $|D^\alpha f|_0$ 显然地被 $|f|_s$ 控制)。

然而 H_0 是完备的，于是取出极限 h^α。当然

$$(f, D^\alpha \varphi)_0 = \lim(f_i, D^\alpha \varphi)_0 = \lim(-1)^{|\alpha|}(D^\alpha f_i, \varphi)_0 = (-1)^{|\alpha|}(h^\alpha, \varphi)_0$$

因此我们得到了存在性。 □

接下来一个性质指出了弱导数的意义：完备化后的空间 H_s 上的范数可以与 A_s 上的范数形式上定义相同，只不过将偏导换为弱导数。

命题 6.2.5. 对于 $f \in H_s(\Omega)$，$|f|_s^2 = \sum_{|\alpha| \le s} |D^\alpha f|_0^2$。

证明. 同样取一列 $\{f_i\}$，在 $|\cdot|_s$ 下趋向 f。由命题 6.2.4 中的构造，当然 $\{D^\alpha f_i\}$ 在 $|\cdot|_0$ 下趋向于 $D^\alpha f$。

那么 $|f|_s^2 = \lim |f_i|_s^2 = \lim \sum |D^\alpha f_i|_0^2 = \sum |D^\alpha f|_0^2$。 □

接下来将要证明 Sobolev 空间的等价表述，为此先说明如下引理。

引理 6.2.6 (光滑化引理). *对于紧支实值光滑函数 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，$\chi \ge 0$。如果 $\operatorname{supp}\chi \subseteq B(0,1)$，并且 $\int_{\mathbb{R}^n} \chi = 1$。对于 $\forall \varepsilon > 0$，记 $\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\chi(\frac{x}{\varepsilon})$。*

对于 $f \in L^2(\Omega)$，将其用零值延拓到 $\mathbb{R}^n$ 上：$f(x) = 0 \ for \ x \notin \Omega$，定义卷积

$$(f * \chi_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\chi_\varepsilon(x-y)dy$$

那么：

1. *$d(\operatorname{supp} f, \mathbb{R}^n - \operatorname{supp}(f * \chi_\varepsilon)) \le \varepsilon$*
2. *$f \mapsto f * \chi_\varepsilon$ 是一个 $L^2(\Omega) \to C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ 的映射。并且在 L^2 范数下 $f - f * \chi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$。*
3. *若 $d(\operatorname{supp} f, \mathbb{R}^n - \Omega) > 2\varepsilon$，且弱导数 $D^\alpha f$ 存在，那么 $D^\alpha(f * \chi_\varepsilon) = (D^\alpha f) * \chi_\varepsilon$。*

证明.

1. 由于 $(f*\chi_\varepsilon)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-\varepsilon y)\chi(y)dy$，若 $(f*\chi_\varepsilon)(x)\neq 0$，则 $\exists y, s.t. f(x-\varepsilon y)\neq 0$，$i.e. |x-y|\leq\varepsilon$。于是结果得证

2. 我们首先证明 $\forall\alpha$，$D^\alpha(f*\chi_\varepsilon)$ 存在，由下式给出：

$$D^\alpha(f*\chi_\varepsilon)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)D_x^\alpha(\chi_\varepsilon(x-y))dy$$

（注意这里 D^α 不是弱导数）首先考虑 $D^\alpha=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 的情况，

$$\frac{(f*\chi_\varepsilon)(x+\Delta x_i)-(f*\chi_\varepsilon)(x)}{\Delta x_i}$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\frac{\chi_\varepsilon(x+\Delta x_i-y)-\chi_\varepsilon(x-y)}{\Delta x_i}dy$$

由于 $\chi_\varepsilon\in C_c^\infty(B(0,\varepsilon))$。那么 $\lim\dfrac{\chi_\varepsilon(x+\Delta x_i-y)-\chi_\varepsilon(x-y)}{\Delta x_i}=\dfrac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x^i}(x-y)$。紧支保证存在一个 K 使得 $|\dfrac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x^i}(x-y)|\leq K,\forall x,y$。

因此中值定理保证 $|\dfrac{\chi_\varepsilon(x+\Delta x_i-y)-\chi_\varepsilon(x-y)}{\Delta x_i}|\leq K$。

于是

$$|\frac{(f*\chi_\varepsilon)(x+\Delta x_i)-(f*\chi_\varepsilon)(x)}{\Delta x_i}-\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x^i}(x-y)dy|$$

$$\leq\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\cdot|\frac{\chi_\varepsilon(x+\Delta x_i-y)-\chi_\varepsilon(x-y)}{\Delta x_i}-\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x^i}(x-y)|dy$$

$$\leq(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^2dy)^{1/2}(\int_{\mathbb{R}^n}|\frac{\chi_\varepsilon(x+\Delta x_i-y)-\chi_\varepsilon(x-y)}{\Delta x_i}-\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x^i}(x-y)|^2)^{1/2}\leq Const.$$

因此由 Lebesgue 控制收敛定理，当 $\Delta x_i\to 0$ 时积分和极限可交换。于是这就是要证的结果。逐次取偏微分即可证明结果对一般的 D^α 偏微分算子都成立，于是这就说明了 $f*\chi_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$。

Claim. $|f*\chi_\varepsilon|_{0,\mathbb{R}^n}\leq|\chi|_{L^1}|f|_0$

这是因为

$$|f*\chi_\varepsilon|_{0,\mathbb{R}^n}^2=\int_{\mathbb{R}^n}|\int_{\mathbb{R}^n}f(x-\varepsilon y)\chi(y)dy|^2dx$$

$$\overset{Schwartz}{\leq}\int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-\varepsilon y)|^2\chi(y)dy)(\int_{\mathbb{R}^n}\chi(y)dy)dx$$

$$=|\chi|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-\varepsilon y)|^2\chi(y)dy)dx=|\chi|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^n}(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-\varepsilon y)|^2\chi(y)dx)dy$$

$$=|\chi|_{L^1}^2|f|_0^2$$

进一步地，同理有 $|f*\chi|_{L^p}\leq|f|_{L^p}|\chi|_{L^1}\quad\forall f\in L^p(\Omega),\chi\in L^1(\Omega)$。

现在证明 $|f*\chi_\varepsilon-f|_0\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0$。由于 L^2 是 C_c^∞ 在 $|\cdot|_{L^2}=|\cdot|_0$ 范数下的完备化，因此我们选出一列 $f_i\in C_c^\infty(\Omega)$ 在 $|\cdot|_0$ 意义下趋向于 f。于是 $\forall\eta>0$，存在充分大 $i, s.t.|f_i-f|_0<\eta$。

由于

$$|f*\chi_\varepsilon-f|_0\leq|(f-f_i)*\chi_\varepsilon|_0+|f_i*\chi_\varepsilon-f_i|_0+|f_i-f|_0$$

$$\le |\chi|_{L^1}|f_i - f|_0 + |f_i - f|_0 + |f_i * \chi_\varepsilon - f_i|_0$$

由于 f_i 紧支，且 f_i 一致连续，常规分析手段可以立刻说明 $|f_i * \chi_\varepsilon - f_i|_0 \to 0, \varepsilon \to 0$。

因此我们先取 η 充分小，取出对应的 i 控制住前两项，再取充分小 ε 控制住第三项，于是就证明了 2.

3. 由假设和 1.，$d(\mathrm{supp}(f * \chi_\varepsilon), \mathbb{R}^n - \Omega) > \varepsilon$。由弱导数定义知 $\mathrm{supp}(D^\alpha f) \subseteq supp(f)$，于是 $d(\mathrm{supp}((D^\alpha f) * \chi_\varepsilon, \mathbb{R}^n - \Omega) > \varepsilon$。

因此只需证明对于 $x \in \Omega$，只要 $d(x, \mathbb{R}^n - \Omega) > \varepsilon$，就有 $D^\alpha(f * \chi_\varepsilon)(x) = ((D^\alpha f) * \chi_E)(x)$。

由于 $d(x, \mathbb{R}^n - \Omega) > \varepsilon$，作为 y 的函数 $\chi_\varepsilon(x - y) \in C_c^\infty(\Omega)$。那么由 2. 中的证明过程：

$$D^\alpha(f * \chi_\varepsilon)(x) = \int_\Omega f(y) D_x^\alpha \chi_\varepsilon(x - y) dy = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(y) D_y^\alpha \chi_\varepsilon(x - y) dy$$

$$((D^\alpha f) * \chi_\varepsilon)(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(y) D_y^\alpha \chi_\varepsilon(x - y) dy$$

（这是由弱导数定义得到的）

从而证明了 3.

□

现在终于可以给出 H_s 的等价定义了：

命题 6.2.7 (Sobolev 空间的等价定义). *$H_s(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) | \forall \alpha, |\alpha| \le s,$ 弱导数 $D^\alpha f$ 存在 $\}$*

证明. 对 $f \in H_0(\Omega) = L^2(\Omega)$，如果其直至 $|\alpha| \le S$ 阶的各阶弱导数都存在，需要证明存在 $f_i \in A_s(\Omega)$，在 $|\cdot|_s$ 下趋向于 f。

然而这个命题的证明是简单的，对 f 作单位分拆，使得每个分拆的支集都是紧的。利用光滑化引理的逼近就有了 $|\cdot|_s$ 下收敛，将它们还原回 f 即证。下面具体叙述如下：

选取一组可数局部有限的预紧开覆盖（每个开集的闭包为紧集的开覆盖），$\{\eta_\alpha\}$ 为一组从属的单位分拆，并且 $\mathrm{supp}\, \eta_\alpha$ 也是紧的。那么由光滑化引理，可以取一组 $\delta(n) \to 0$，$\delta(n) > 0$，使得：

$$|D^\beta(\eta_\alpha f) * \chi_{\varepsilon(\alpha,n)} - D^\beta(\eta_\alpha f)|_0 < \delta(n)/2^{\alpha+1}$$

对任何 $|\beta| \le s$ 成立。

令 $f_{\delta(n)} = \sum (\eta_\alpha f) * \chi_{\varepsilon(\alpha,n)}$，当然 $f_{\delta(n)} \in C^\infty(\Omega)$，并且对任何 $|\beta| \le s$，都有：

$$|D^\beta f_{\delta(n)} - D^\beta f|_0 = |\sum \{D^\beta[(\eta_\alpha f) * \chi_{\varepsilon(\alpha,n)}] - D^\beta(\eta_\alpha f)\}|_0 \le \delta(n)$$

因此 $|f_{\delta(n)} - f|_s \to 0$，即 $f \in H_s(\Omega)$ □

在 L^2 这个大背景下讨论将会变得简明许多，可以直接看出如下结果。

推论 6.2.8.

1. (Sobolev 链) $H_s(\Omega) \subseteq H_{s-1}(\Omega) \subseteq \cdots \subseteq H_0(\Omega) = L^2(\Omega)$

2. $H_s(\Omega)$ 是 $A_s(\Omega)$ 在 L^2 中对 $|\cdot|_s$ 的闭包。

3. 如果 $f \in H_t(\Omega)$，$\forall |\alpha| \le t, D^\alpha f \in H_s(\Omega)$，则 $f \in H_{t+s}(\Omega)$

下面我们从 $\mathbb{R}^n$ 转到复流形，这时的 D^α 自然也是对 $(\partial/\partial z^i, \partial/\partial \bar{z}^i)$ 讨论的。我们自然想问这样做和将复流形看做实流形进行讨论 $(\partial/\partial x^i, \partial/\partial y^i)$ 有什么差别，接下来的引理回答了这个问题。

引理 6.2.9. *设开集 $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$，$\Omega$ 是 Ω' 中的预紧开集，Ω' 上有 n 个复向量场 $X_j = \sum a_j^i \frac{\partial}{\partial x_i}$，并且 $\operatorname{span}\{X_i\} = \operatorname{span}\{\partial/\partial x_i\}$。*

那么 $||f||_s^2 = \sum_{|\alpha| \le S} |X^\alpha f|_0^2$ 也在 $A_s(\Omega)$ 上诱导了一个范数。

在 $A_s(\Omega)$ 上 $||\cdot||_s$ 和 $|\cdot|_s$ 是范数的等价，i.e. 存在 $a_1, a_2 > 0$ 使得 $a_1||\cdot||_s \le |\cdot|_s \le a_2||\cdot||_s$。

证明. 只需注意在此变换下两个范数仅仅差的是若干 Jacobian 行列式的模长平方作为系数的和，由拟紧性它必然有界，同时一定非负。 □

因此我们看到复流形上的范数 $||\cdot||_s$ 和将其视作实流形的范数是等价的。

6.2.2 Hodge 定理

首先我们有 $A^{p,q}(L)$ w.r.t. 某个局部平凡化 $\{W_\alpha\}$（紧性保证它可以说有限个）。对于每个 $\{W_\alpha\}$ 中的单位分拆分量 f_α，定义 Sobolev s 范数 $|\cdot|_s = \sum_{k\le s} \nabla^k f_\alpha$，这里 ∇^k 是若干 ∇_{i_k} 的复合，其中 ∇_{i_k} 指协变导数 ∇_{z_i}，∇ 为 Hermite 联络。

这只不过是前文的进一步推广，因而我们规定 $|f|_s^2 = \sum |f_\alpha|_s^2$。

类似地，定义 Sobolev 空间 $H_s^{p,q}(L)$ 为 $A^{p,q}(L)$ 按 $|\cdot|_s$ 的完备化。再取 $H_s(L) = \oplus_{p,q} H_s^{p,q}(L)$。

还需说明定义与开覆盖选取无关：对于任何两组满足这里要求的开覆盖 $\{W_i\}, \{W_i'\}$，考虑 $\{W_i \cup W_j\}$ 也是开覆盖。对于这个开覆盖诱导的范数，都可以利用引理 6.2.9证明它和 W_i 诱导的以及 W_j 诱导的都是范数等价，因此这就说明了 $H^{p,q}$ 的良定义（范数等价诱导的拓扑相同）。

另一方面，已知 Hermitian 度量诱导了 $A(L)$ 上的内积，通过同样的手段可以看出这内积诱导的范数 $|\cdot|$ 和 $|\cdot|_0$ 是范数等价的，因此 $H^0(L)$ 还可以看做 $A(L)$ 在 $|\cdot|$ 下的完备化。

约定. 由于计算方便，在 $H_0(L)$ 上通常考虑的是 $|\cdot|$ 范数而不是 $|\cdot|_0$。

定义 6.2.10 (弱算子). $f, g \in H^0(L)$，称 $Pf = g(weak)$ 如果 $\forall \varphi \in A(L), (f, P^*\varphi) = (g, \varphi)$

如果 $f \in A(L)$，那么 $Pf = g(weak) \implies (Pf, \varphi) = (f, P^*\varphi) = (g, \varphi)$。特别地当 $P = \bar{\partial} + \vartheta$ 或 $\bar{\partial}$ 或 ϑ 或 $\Box$ 时，这意味着 $Pf = g$。

命题 6.2.11 (Dirichlet 内积). *在 $A^{p,q}(L)$ 上定义 Dirichlet 内积如下：$\mathscr{D}(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) + (\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}\psi) + (\vartheta\varphi, \vartheta\psi) = (\varphi, (\mathrm{id} + \Box)\psi)$*

引理 6.2.12 (Sobolev 引理). *$H_{[n/2]+1+s]}(L) \subset C^s(L)$，并且 $\cap H_s(L) = A(L)$*

引理 6.2.13 (Rellich 引理). *对于 $s > r$，$H_s \to H_r$ 这个嵌入是紧算子。*

定理 6.2.14 (预备定理 I:Gårding 不等式). *对于 $\varphi \in A^{p,q}(L)$，$|\varphi|_1^2 \le C\mathscr{D}(\varphi), C > 0$.*

定理 6.2.15 (预备定理 II:Weyl 引理). *$\varphi \in H_s^{p,q}(L)$，$\psi \in H_0^{p,q}(L)$，如果 $\Delta\psi = \varphi(weak)$ 有弱解 ψ，那么 $\psi \in H_{s+2}^{p,q}(L)$。*

我们现在从预备定理推出 Hodge 定理。

Hodge 定理的证明.

Step 1. Claim: 对于每个 $\varphi \in H_0^{p,q}(L) = L^2 - (p,q)$ 形式，存在唯一的 $\psi \in H_1^{p,q}(L)$ 使得对于任何 $\eta \in A^{p,q}(L)$，都有 $(\psi, (\mathrm{id} + \Box)\eta) = (\varphi, \eta)$。并且这样定义出的 $H_0^{p,q}(L) \to H_1^{p,q}(L)$ 的映射 $\varphi \mapsto \psi$ 是有界线性算子。

由 Weyl 引理，如果考虑特征方程 $\Box\eta = \lambda\eta, \eta \in H_0^{p,q}(L)$，那么 $\eta \in H_2^{p,q}(L)$，反复操作知 $\eta \in \cap H_s^{p,q}(L) = A(L)$。于是每个 L^2 弱调和形式 $\Box\eta = 0, \eta \in H_0^{p,q}(L)$ 实际上就是一个调和形式。

由于 $\Box$ 在 $A^{p,q}(L)$ 上是自伴的，那么所有特征值都是实的。设 $\omega \in A^{p,q}$ 是特征向量，那么 $\lambda(\omega, \omega) = (\omega, \Box\omega) = (\bar\partial\omega, \bar\partial\omega) + (\vartheta\omega, \vartheta\omega) \geq 0$，因此 $\lambda \geq 0$，即所有特征值都是非负的。

因此 $\mathrm{id} + \Box$ 的核是 0：如果 $(\mathrm{id} + \Box)\omega = 0, \Box\omega = -\omega$，由特征值的结论知 $\omega = 0$。

现在考虑 $(\mathrm{id} + \Box)A^{p,q}(L) \subseteq A^{p,q}(L)$，考虑它的共轭线性泛函 l：$l((I + \Box)\eta) = (\varphi, \eta)$。（良定因为 $\mathrm{id} + \Box$ 是单的）

那么 $|l((I + \Box)\eta)| \leq |\varphi|_0 |\eta|_0 \leq |\varphi_0| \cdot |(\mathrm{id} + \Box)\eta|$。由 Garding 不等式 Dirichlet 范数和 Sobolev-1 范数是等价的，因此 l 是一个 $(\mathrm{id} + \Box)A^{p,q}(L) \to H_1^{p,q}(L)$ 的有界线性泛函。由 Hahn-Banach 定理，l 可以被延拓到整个 $H_1^{p,q}(L)$ 上，同时保持有界。但另一方面 $H_1^{p,q}(L)$ 是 Hilbert 空间，于是由 Riesz 定理，存在 $\psi \in H_1^{p,q}$ 满足：

$$l((\mathrm{id} + \Box)\eta) = (\psi, (\mathrm{id} + \Box)\eta)$$

容易验证 ψ 是唯一的，那么我们就有了 $(\psi, (\mathrm{id} + \Box)\eta) = (\varphi, \eta), \forall \eta \in A^{p,q}(L)$。

因此我们得到了算子 $S : \varphi \to \psi$，它是自伴的，因为 $\mathrm{id} + \Box$ 也是自伴的。接下来证明有界性：

$$|S\varphi|_1^2 \leq C|S\varphi|_D^2 \leq C(S\varphi, (\mathrm{id} + \Box)S\varphi)$$

但是由 S 的定义，$(\varphi, \eta) = (\psi, (\mathrm{id} + \Box)\eta) = ((\mathrm{id} + \Box)\psi, \eta) \implies (id + \Box)S\varphi = \varphi$，于是：

$$C(S\varphi, (\mathrm{id} + \Box)S\varphi) = C(S\varphi, \varphi) \leq |S\varphi|_0 |\varphi|_0$$

。

现在 S 是 $\mathrm{id} + \Box$ 的逆，于是是 $L^2 - (p,q)$ 形式上的积分算子，从而存在 $K > 0, |S\varphi|_0 \leq K|\varphi|_0$，因此 $|S\varphi|_1^2 \leq CK|\varphi|_0^2$，从而证明了 Claim。

Step 2.

考虑 $H_0^{p,q}(L) \xrightarrow{S} H_1^{p,q}(L) \hookrightarrow H_0^{p,q}(L)$，最后一个算子是紧的嵌入。因此这个复合 $H_0^{p,q}(L) \to H_0^{p,q}(L)$ 是紧的自伴自同态。谱定理指出 $H_0^{p,q}(L)$ 可以写成可数个 S 的特征子空间的直和，并且每个特征子空间维数都是有限的，并且这一分解是正交的。设它们分别为 $S(\lambda_m) = \{\varphi | S(\varphi) = \lambda_m \varphi\}$，那么 $H_0 = \oplus_{m \geq 0} S(\lambda_m)$。

现在 $S\varphi = 0 \implies 0 = (S\varphi, (\mathrm{id} + \Box)\eta) = (\varphi, \eta), \forall \eta \in A^{p,q}(L)$。于是 $\varphi = 0$，因为 $A^{p,q}$ 在 H_0 中是稠密的。因此 $\lambda_m \neq 0$，现在讨论 $\varphi \in S(\lambda_m), S\varphi = \lambda_m \varphi$，那么：

$$(\mathrm{id} + \Box)S\varphi = \varphi = (\mathrm{id} + \Box)(\lambda_\varphi) = \lambda_\varphi + \lambda(\Box\varphi)$$

于是 $\Box\varphi = \dfrac{1-\lambda_m}{\lambda_m}\varphi$。

这一过程当然也可反过来进行，于是两个特征子空间 $S(\lambda_m)$ 和 $\Box(\dfrac{1-\lambda_m}{\lambda_m}$ 是同构的。$\mu_m = (1-\lambda_m)/\lambda_m$ 是 $\Box$ 的特征值，前文已证它是正实数。将指标 m 重新排序使得 $\mu_0 < \mu_1 < \cdots$。

因此 $H_0^{p,q}(L) = \oplus S(\lambda_m) = \oplus\Box(\mu_m) = \Box(0) \oplus (\bigoplus_{m\geq 1}\Box(\mu+m))$，但是 $\Box(0)$ 正是 $\mathcal{H}^{p,q}(L)$，从而是有限维的。更进一步，Weyl 引理指出每个 $\Box(\mu_m)$ 都是由 C^∞ 的 $(p,q)-$ 形式组成的。

Step 3. Green 算子 G

由于分解的正交性，在 $(\mathcal{H}^\cdot)^\perp$ 上

$$\Box\varphi = \Box(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n) = \sum\Box\varphi_n = \sum\mu_n\varphi_n$$

于是

$$|\Box\varphi|_0^2 = \sum\mu_n^2|\varphi_n|_0^2 \geq \mu_1^2\sum|\varphi_n|_0^2 = \mu_1^2|\varphi|_0^2$$

因此如果构造出了满足要求的 G，由这个不等式它自动是有界的，于是是连续的。

我们现在构造 G，对于 $\mathcal{H}^{p,q}(L)$ 中的元素自然 $G\equiv 0$。在 $\Box(\mu_m)$ 上，取 $G(\varphi) = \dfrac{1}{\mu_m}\varphi$。

由定义：G 是紧的，因为 $1/\mu_m$ 都被系数 $1/\mu_1$ 控制，且每个特征子空间都是有限维的。并且 $\Box G = G\Box$，当然它也和 $\bar{\partial},\vartheta$ 交换。

对于 $\varphi\in H_0^{p,q}(L)$，$G\Box(\varphi-\mathcal{H}(\varphi)) = \Box G(\varphi-\mathcal{H}\varphi) = \varphi-\mathcal{H}(\varphi)$。因此 $\mathrm{id} = \mathcal{H}+\Box G$，这是满足要求的算子。

$\Box$

对于前文提到的预备定理以及相关泛函分析结果，这里略去证明，可以参见 [Gal07]，或者参考资料 [Har94]。

6.3 后续结果

6.3.1 有限维性质

Hodge 定理指出了 $\mathcal{H}^{p,q}(M)\to H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$ 是一个同构，于是考虑层上同调：

定理 6.3.1. *对于紧复流形 M，$\dim H^q(M,\Omega^p) < \infty$*

这是一个重要的结果。现在我们直接给出不依赖于 Hodge 定理的 $q=0$ 时的证明。由紧性，取 M 的一组有限坐标覆盖 $\{U_i\}$，可以取出 V_i 是 U_i 中的预紧开集，并且仍然构成开覆盖。那么全局截面 $\varphi\in H^0(M,\Omega^q) = H^0(\{U_i\},\Omega^q) = H^0(\{V_i\},\Omega^q)$。

其在 U_i 上局部写成 $\varphi = \sum\varphi_i jdz_{i,j}$。定义范数 $||\varphi|| = \sum_{i,j}\sup_{z\in V_i}|\varphi_{i,j}(z)|$。由紧性这个范数是有限的。

那么在此范数下 $H^0(M,\Omega^q)$ 是完备 Banach 空间：这由光滑函数的性质可以得到。并且 Montel 定理指出在此空间中单位球是紧的，于是 Banach 空间的结果指出这个空间是有限维的。

事实上这一证明方式可以进一步推广到任意的 q，这是紧复流形的重要性质。

6.3.2 Kodaira-Serre 对偶

由于 $*\Delta=\Delta*$，因此星算子诱导了一个同构 $\mathcal{H}^{p,q}(M)\to\mathcal{H}^{n-p,n-q}(M)$。特别地，由于流形是紧且连通的，那么 $\mathcal{H}^{0,0}(M)=\mathbb{C}$，那么 $\mathcal{H}^{n,n}(M)\cong\mathbb{C}\cdot\varphi$，其中 $\varphi=*1$ 是体积元。

我们现在希望这个同构不依赖于度量，于是有如下抽象的表述：对于 X 上的层 $\mathscr{F},\mathscr{G},\mathscr{H}$，以及层态射 $\mathscr{F}\otimes\mathscr{G}\to\mathscr{H}$，那么有诱导的杯积 $H^*(X,\mathscr{F})\otimes H^*(X,\mathscr{G})\to H^*(X,\mathscr{H})$。现在将态射取为外积 $\wedge:\Omega^p\otimes\Omega^q\to\Omega^{p+q}$，当然诱导了对应的上同调群的映射。

现在回到微分形式：同样地有外积诱导 $A^{p,r}(M)\otimes A^{q,s}(M)\to A^{p+q,r+s}(M)$，记为 $\{,\}$。它能诱导上同调群的映射，因为 $\bar\partial(\psi\wedge\eta)=(\bar\partial\psi)\wedge\eta+(-1)^{\deg\psi}\psi\wedge(\bar\partial\eta)$。

通过观察杯积的具体表达式 (Alexander-Whitney 映射)，可以看出 $\mathcal{H}$ 之间的映射和 H 之间的映射在相差符号的意义下是一样的，即有交换图在至多相差符号的意义下成立：

$$\begin{tikzcd}
H^{p,q}_{\bar\partial}(M) \arrow[d] & \otimes & H^{p',q'}_{\bar\partial}(M) \arrow[r] \arrow[d] & H^{p+p',q+q'}_{\bar\partial}(M) \arrow[d] \\
H^q(M,\Omega^p_M) & \otimes & H^{q'}(M,\Omega^{p'}_M) \arrow[r] & \otimes H^{q+q'}(M,\Omega^{p+p'}_M)
\end{tikzcd}$$

下面我们严格叙述对偶定理。

定理 6.3.2 (Kodaira-Serre 对偶定理).

1. $H^n(M,\Omega^n)\cong\mathbb{C}$，并且这个同构是自然的;

2. $H^q(M,\Omega^p)\otimes H^{n-q}(M,\Omega^{n-p})\to H^n(M,\Omega^n)\to\mathbb{C}$（映射按上文所述定义）是非退化的双线性映射，i.e. 若 $v\neq0$，则 $\exists w,s.t.v\otimes w\neq0$。

证明.

1. 定义同构映射如下：对于 $\zeta\in H^n(M,\Omega^n)$，取代表元 η，定义映射 $tr(\zeta)=\int_M\eta$，Stokes 公式可以直接验证这是良定义的，并且是自然的。

另一方面，取 M 的度量使之成为 Hermite 流形，那么 Hodge 定理指出 $H^{n,n}_{\bar\partial}(M)\cong\mathcal{H}^{n,n}(X)=\mathbb{C}\cdot\Phi$。而 $tr(\Phi)=\int_M\Phi=Vol(X)>0$，因此 tr 是同构。

2. 只需验证非退化：对于 $\zeta\neq0$，$\zeta\otimes*\zeta\mapsto\int_M\zeta\wedge*\zeta=|\zeta|^2>0$。 □

6.3.3 Dolbeault 上同调的 Kunneth 公式

对于紧复流形 X,Y，积流形 $X\times Y$ 到 X 的投影诱导了 $H^q(X,\Omega^p_X)\to H^q(X\times Y,\Omega^p_{X\times Y})$。于是同样地考虑 Alexander-Whitney 映射，有 $H^*(X,\Omega^*_X)\otimes H^*(Y,\Omega^*_Y)\to H^*(X\times Y,\Omega^*_{X\times Y})$。

定理 6.3.3 (Dolbeault 上同调的 Kunneth 公式). *对于紧复流形 X,Y，映射 $H^*(X,\Omega^*_X)\otimes H^*(Y,\Omega^*_Y)\to H^*(X\times Y,\Omega^*_{X\times Y})$ 是同构。*

证明. 选取 X,Y 上的 Hermite 度量，以及诱导的 $X\times Y$ 的乘积度量，Hodge 定理指出我们只需考虑调和形式的情况 $\mathcal{H}^{*,*}(X)\otimes\mathcal{H}^{*,*}(Y)\to\mathcal{H}^{*,*}(X\times Y)$ 即可。注意：在此时度量是不重要的，事实上无论选取了什么样的度量，这个映射都应该是一个同构，这是可以直接从 Hodge 定理得到的。

Step 1.（纯形式足够多）取 X, Y 的局部坐标分别为 z, w。注意我们现在讨论的映射实际上正是杯积去掉对角函子的拉回部分（i.e. Alexander-Whitney），因此调和形式之间的映射就是由 Kodaira-Serre 对偶中定义的映射诱导的，即：

$$A^{p,q}(X) \otimes A^{p',q'}(Y) \to A^{p+p',q+q'}(X \times Y) : \xi \otimes \eta \mapsto \xi(z) \wedge \eta(w)$$

称 $\xi(z) \wedge \eta(w)$ 这样的形式为纯形式（或可分解形式，这个记号在张量积中也讨论过）。

Claim. 纯形式在 $A^{a,b}(X \times Y)$ 中是 L^2- 稠密的。

欲说明这一结果，只需说明纯形式构成的线性子空间的正交补（w.r.t.L^2 内积）是 0. 如果 ζ（$X \times Y$ 上的形式）满足对任何 ξ, η（分别为 X, Y 上的形式），都有 $\int_{X\times Y}(\zeta, (\xi \wedge \eta))_{L^2}\Phi = 0$，我们希望说明 $\zeta = 0$。欲证明这一点，只需考虑 ζ 在外形式基上的每一个分量，因为由内积的定义它们是正交的，因此无妨假定 $\zeta = \varphi(z, w) \cdot dz \wedge dw$。其中 $\varphi(z, w)$ 是光滑函数。

如果 $\varphi(z_0, w_0) \neq 0$，通过乘上旋转因子 $e^{i\theta}$ 无妨 $\Re(\varphi) > 0$，那么存在一个邻域使得在其上 $\Re(\zeta) > 0$，由乘积拓扑基，可以假定这个邻域是 $U \times V$。在 U, V 上各自寻找紧支形式 ξ, η，并且再一次适当乘上旋转因子，使得 $\Re(\zeta, (\xi \wedge \eta))|_{(z_0,w_0)} > 0$。同样连续性保证充分小邻域 $U' \times V'$ 内都有 $\Re(\zeta, (\xi \wedge \eta)) > 0$。通过乘以 bump 函数，自然可假定在 $U' \times V'$ 外都有 $\Re(\zeta, (\xi \wedge \eta)) = 0$。

于是

$$0 = \Re \int_{X\times Y}(\zeta, (\xi \wedge \eta))\Phi = \int_{U'\times V'} \Re(\zeta, (\xi \wedge \eta))\Phi > 0$$

矛盾。

因此 L^2- 稠密性得证。

Step 2. （$\Box_{X\times Y}$）对于纯形式，$\bar\partial$ 算子满足 $\bar\partial_{M\times N} = \bar\partial_M \pm \bar\partial_N$（外积的外微分公式）。

在 $X \times Y$ 局部地取一组标架，它们是有 X, Y 上的酉标架拼合而成，这自然还是酉标架。从而由 $\bar\partial^*_X = -*\bar\partial_X*$,etc. 得到：

$$\bar\partial^*_{X\times Y} = \bar\partial^*_X \pm \bar\partial^*_Y$$

$$\bar\partial_X \bar\partial^*_Y + \bar\partial^*_Y \bar\partial_X = 0 = \bar\partial_Y \bar\partial^*_X + \bar\partial^*_X \bar\partial_Y$$

注意：这里 $\bar\partial_X$ 作用在 $X \times Y$ 上的形式是通过投影 $X \times Y \to X$ 的拉回提升上去得到的，容易验证这在纯形式上是良好定义的：事实上它即为无视了 Y 坐标部分，保持其不动。

上述关系说明了在纯形式上 $\Box_{X\times Y} = \Box_X + \Box_Y$，即

$$\Box_{X\times Y}(\xi \otimes \eta) = (\Box_X \xi) \otimes \eta + \xi \otimes (\Box_Y \eta)$$

。

现在：纯形式的稠密性自然将 $\Box_{X\times Y} = \Box_X + \Box_Y$ 推广到整个 $A^{p,q}(X \times Y)$。

如果 $\Box_X(\xi) = \lambda\xi, \Box_Y(\eta) = \mu\eta$，那么 $\Box_{X\times Y}(\xi \otimes \eta) = (\lambda + \mu)(\xi \otimes \eta)$。结合稠密性知 $\Box_{X\times Y}$ 的特征值恰为 $\lambda_i + \mu_j$，并且纯特征形式（i.e. $\xi \otimes \eta$ 构成了 $A^{p,q}(X \times Y)$ 的一组 L^2- 基。（回忆 Hodge 定理的证明中的谱定理）

Step 3. （**调和形式**）如果 $\zeta = \xi \otimes \eta$ 是调和的，并且 ξ, η 各自是 X, Y 的特征形式，那么 $0 = (\lambda + \mu)\eta$。但是 $\lambda, \mu \geq 0$，于是只有 $\lambda = \mu = 0$，即 ξ, η 都是调和的。

由于 L^2- 基，这就直接证明了所需的同构。

□

6.3.4 HDRSS

对于双链复形 $A^{*,*}(X)$,存在相伴的总复形 $K^\bullet=\oplus_{p+q}A^{p,q}(X)$,当然 $H^r(K^\bullet)=H^r_{dR}(X,\mathbb{C})$。而双链复形使得总复形 $K^\bullet$ 成为滤复形，称为 De Rham 上同调的 Hodge 滤过：

$$K^l\supseteq F^pK^l=\bigoplus_{p'\geq p,p'+q'=l}A^{p',q'}(X)$$

那么由滤复形构造谱序列的方法，$E_1^{p,q}=H^{p+q}(F^pK^\bullet/F^{p+1}K^\bullet)=H^{p+q}(A^{p,\bullet-p}(X))=H^{p,q}_{\bar\partial}(X)$。(注意由定义滤链都是有界的)

同样有构造，$E_\infty^{p,q}=F^pH^{p+q}/F^{p+1}H^{p+q}$，其中 F^pH^n 指 F^pK^n 中元素代表的上同类构成的子模，因此由定义 $E_\infty^{p,q}=F^pH^{p+q}_{dR}(X,\mathbb{C})/F^{p+1}H^{p+q}_{dR}(X,\mathbb{C})$。

定理 6.3.4 (HDRSS). *对于复流形 X，存在谱序列 (Hodge to de Rham spectral sequence, HDRSS)，使得：*

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(X)=E_1^{p,q}\implies H^{p+q}_{dR}(X,\mathbb{C})$$

于是我们有一些推论:首先定义 Hodge 数和 Betti 数是对应的 Dolbeault 上同调和 de Rham 上同调的维数。

由 HDRSS 的构造方式知 $E_{r+1}^{p,q}=Z_r^{p,q}/B_r^{p,q},B_r\subset Z_r\subset E_r$。因此如果 $E_1^{p,q}$ 是有限维 $\mathbb{C}$–模，那么 $\dim_{\mathbb{C}}E_{r+1}^{p,q}\leq\dim_C E_r^{p,q}$，于是 $\dim_{\mathbb{C}}E_\infty^{p,q}\leq h^{p,q}$。

另一方面 $F^lH^l_{dR}=E_\infty^{l,0},F^{l-1}H^l_{dR}/F^lH^l_{dR}=E_\infty^{l-1,1},\cdots$。那么

$$b_l=\sum_{j=0}^{l}\dim E_\infty^{j,l-j}\leq\sum_{p+q=l}h^{p,q}\quad(Frohlicher\ ineq.)$$

于是这说明了对于紧复流形，其 de Rham 上同调也是有限维的。

特别地，$\dim_{\mathbb{C}}E_{r+1}^{p,q}=\dim_C E_r^{p,q}\forall p,q\geq 0\iff d_r=0$。因此 $b_l=\sum_{p+q=l}h^{p,q}\forall 0\leq l\leq 2\dim_{\mathbb{C}}X\iff$ HDRSS 在 $r=1$ 页退化。此时有 (可能非自然的) 同构:

$$H^l_{dR}(X,\mathbb{C})\cong\bigoplus_{p+q=l}H^{p,q}_{\bar\partial}(X)\cong\bigoplus_{p+q=l}H^q(X,\Omega_X^p)$$

当然此时 Euler 示性数也满足 $\chi(X,\mathbb{C})=\sum_{l=0}^{2\dim_{\mathbb{C}}X}(-1)^lb_l=\sum_{p,q}(-1)^{p+q}h^{p,q}$

总结一下上述结果:

定理 6.3.5 (Frohlicher).

对于紧复流形 X，$b_l\leq\sum_{p+q=l}h^{p,q}$。

当 HDRSS 在 $r=1$ 退化时，欧拉示性数满足 $\chi(X,\mathbb{C})=\sum_{p,q}(-1)^{p+q}h^{p,q}$，并且有非自然同构

$$H^l_{dR}(X,\mathbb{C})\cong\bigoplus_{p+q=l}H^{p,q}_{\bar\partial}(X)\cong\bigoplus_{p+q=l}H^q(X,\Omega_X^p)$$

。

在后文中将会看到流形是 Kahler 的时候有着相当令人惊讶的好性质，它将使上文的一些不等式全部成为等式。

第七章 Kahler 流形

7.1 Kahler 条件

对于一个复流形 M，以及其上度量。如果在某个开集 U 上度量 ds^2 是 Euclidean 的，即存在全纯坐标 z 使得 $ds^2=\sum dz_i\otimes d\bar{z}_i$，那么一些简单的计算指出 $\Delta_{\bar{\partial}}=\frac{1}{2}\Delta_d$。尽管流形上并不一定能够赋予处处 Euclidean 的度量，但是 Kahler 理论指出，上述等式成立等价于流形上的度量在每一点以 2 阶逼近 Euclidean 度量，这一条件称为 Kahler 条件。

Kahler 流形有着相当好的性质，我们将看到 Kahler 条件本身就已经有相当令人惊讶的等价表述。

对于一个度量 $ds^2=\sum h_{ij}dz_i\otimes d\bar{z}_j=\sum\varphi_i\otimes\bar{\varphi}_i$，有关联 $(1,1)-$ 形式 $\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum\varphi_i\wedge\bar{\varphi}_i$。

Kahler 条件 1. 称度量 ds^2 是 Kahler 的，如果 $d\omega=0$。

考虑定义 4.2.18，设为 τ。那么：

Kahler 条件 2. 称度量 ds^2 是 Kahler 的，如果对于其上的 Hermite 联络（唯一的与复结构和度量结构都相容的联络），对于某个标架有挠率矩阵 $\tau=0$。

注意：这个条件是良好陈述的，因为挠率矩阵在随标架变换时乘以过渡矩阵的逆。

定理 7.1.1. *条件 1 $\iff$ 条件 2。*

证明. 由于 2 个条件都是与标架选取无关的，因此只需假定标架为自然标架 $\partial/\bar{\partial}z_i$ 即可。那么对偶的余标架场是 $(dz^1,\cdots,dz^m)$，因此 $d\sigma=0$。

由于自然标架 $\partial/\bar{\partial}z_i$ 是全纯的，那么 Hermite 联络的联络矩阵为 $\omega=\partial H\cdot H^{-1}$，其中 H 是度量矩阵。因此 $\tau=0\iff\sigma\wedge\partial H=0$。

这等价于 $\sum_{i,j}\frac{\partial h_{ik}}{\partial z^j}dz^j\wedge dz^i=0$，i.e.

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial z^j}=\frac{\partial h_{ik}}{\partial z^i},\quad\forall i,j,k$$

另一方面 Hermite 度量的关联形式是 $\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum h_{ij}dz_i\wedge d\bar{z}_j$。

那么其外微分为 0 等价于：

$$\sum_{i,j}(\sum_k\frac{\partial h_{ij}}{\partial z_k}dz_k\wedge dz_i\wedge d\bar{z}_j+\sum_k\frac{\partial h_{ij}}{\partial\bar{z}_k}d\bar{z}_k\wedge dz_i\wedge d\bar{z}_j)=0$$

利用 $h_{ij}=\overline{h_{ji}}$ 知 $\frac{\partial h_{ij}}{\partial\bar{z}_k}=\overline{(\frac{\partial h_{ji}}{\partial z_k})}$：这是因为对任何复值函数：$\partial f/\partial z=\overline{(\partial\bar{f})/(\partial\bar{z})}$，展开验算即可。

因此在 Kahler 形式的外微分中观察各个基，即可得到等价性。 □

定义 7.1.2 (度量的切触阶). 称度量 ds^2 在每一点 $z_0 \in M$ 以 k 阶切触 (osculates to order k) 欧式度量，如果在 z_0 的某个邻域存在一组流形的全纯坐标 (z)，使得

$$ds^2 = \sum(\delta_{ij} + g_{ij})dz_i \otimes d\bar{z}_j$$

并且每个 g_{ij} 在 z_0 的阶为 k，即直至 k 阶导数为 0，但 $k+1$ 阶非 0。这时我们记为：

$$ds^2 = \sum(\delta_{ij} + [k])dz_i \otimes d\bar{z}_j$$

定理 7.1.3 (**Kahler 条件 3**). *ds^2 是 Kahler 的当且仅当它在每一点以至少 2 阶切触欧式度量。*

定理 7.1.4. *一个方向是显然的，如果以至少 2 阶切触，那么 $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum(\delta_{ij} + [\geq 2])dz_i \wedge d\bar{z}_j$。直接验证知 $d\omega(z_0) = 0$。*

对于另一个方向，首先找到一组 (z_i) 坐标使得 $h_{ij}(z_0) = \delta_{ij}$：这当然是可以做到的。

那么此时 $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j}(\delta_{ij} + \sum_k a_{ijk}z_k + a'_{ijk}\bar{z}_k + [\geq 2])dz_i \wedge d\bar{z}_j$

Hermite 性 $h_{ij} = \overline{h_{ji}}$ 被改写为 $a'_{jik} = \overline{a_{ijk}}$；

$d\omega = 0 \implies a_{ijk} = a_{kji}$。

现在我们希望找到一组坐标变换 $z_k = w_k + \frac{1}{2}\sum_{l,m} b_{klm}w_l w_m$，使得 ω 在 w 下是所需形式。

现在无妨假定 $b_{klm} = b_{kml}$，那么 $dz_k = dw_k + \sum b_{klm}w_l dw_m$。

于是：

$$\begin{aligned}(2/\sqrt{-1})\omega &= \sum_i(dw_i + \sum_{l,m} b_{ilm}w_l dw_m) \wedge (dw_i + \sum_{l,m} b_{ilm}w_l dw_m) \\ &+ \sum_{i,j,k}(a_{ijk}w_k + a'_{ijk}\bar{w}_k)dw_i \wedge d\bar{w}_j + \sum[\geq 2]dw_i \wedge d\bar{w}_j \\ = \sum_{i,j}\Big(\delta_{ij} &+ \sum_k(a_{ijk}w_j + a'_{ijk}\bar{w}_k + b_{jki}w_k + \overline{b_{ijk}w_k})\Big)dw_i \wedge d\bar{w}_j + \sum[\geq 2]dw_i \wedge d\bar{w}_j\end{aligned}$$

因此取 $b_{jki} = -a_{ijk}$ 即满足要求。另一方面 a 是全纯的，因此 (w_i) 的确也是一个全纯坐标。

注记. 这一条件的一个有用的变形是：对于任何一点 $z_0 \in M$，存在一组酉余标架 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$，使得 $d\varphi_i(z_0) = 0$。这和条件 3 之间的等价性是显然的，直接验证即可。

例子.

1. 紧 Riemann 面是 Kahler 的，因为 ω 是 2-形式，$d\omega = 0$。

2. 环面 $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$，因为其上有显然的欧式度量 $ds^2 = \sum dz_i \otimes d\bar{z}_i$

3. $S \subset M$，前文已证诱导的子流形度量的关联形式就是 M 上关联形式的拉回。于是 M 是 Kahler 的说明 S 也是。

4. 回忆 $\mathbb{C}P^n$ 的 Fubini-Study 度量（第 2.4 节），可以验证它也是 Kahler 的。

5. 任何可以嵌入 $\mathbb{C}P^n$ 的紧复流形都是 Kahler 的：这由 3 和 4 共同说明。

定理 7.1.5 (紧 Kahler 流形的性质). *对于紧 Kahler 流形 M:*

1. 偶数阶 Betti 数 $b_{2q}(M)$ 是正的。（Hodge 定理的结果已证其有限性）

2. 全纯 $q-$ 形式 $H^0(M, \Omega^q)$ 到 $H^q_{dR}(M)$ 的映射是单射。即：每个闭形式 η 都不是恰当的。

3. 解析子簇 $V \subset M$ 的基本类 η_V 非 0.

证明.

2. 对于全纯 $(q,0)-$ 形式，只需证 $d\eta=0,\eta=d\psi \iff \eta=0$。设 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是局部酉余标架，$\eta=\sum\eta_I\varphi_I$，那么 $\eta\wedge\bar\eta=\sum_{I,J}\eta_I\bar\eta_J\varphi_I\wedge\bar\varphi_J$。

但是 $\omega=\dfrac{\sqrt{-1}}{2}\sum\varphi_i\wedge\bar\varphi_i$，于是：

$$\omega^{n-q}=C_q(n-q)!\sum_{\#K=n-q}\varphi_K\wedge\bar\varphi_K \quad C_q\neq 0$$

因此 $\eta\wedge\bar\eta\wedge\omega^{n-q}=C_q\sum_I|\eta_I|^2\cdot\Phi$。其中 Φ 是体积元。

因此如果 $\eta\neq 0,\int_M\eta\wedge\bar\eta\wedge\omega^{n-q}\neq 0$。

假定 $\eta=d\psi$，那么 $d\eta=d\bar\eta=0$，从而：

$$\int_M\eta\wedge\bar\eta\wedge\omega^{n-q}=\int_M d(\psi\wedge\bar\eta\wedge\omega^{n-q})=0$$

矛盾。于是 $\eta=d\psi\implies\eta=0$

1. 为说明 $b_{2q}(M)>0$，注意到 ω^q 是一个 $d-$ 闭的 $2q-$ 形式，并且它不恰当：如果 $\omega^q=d\psi$，那么 $\int_M\omega^n=\int_M d(\psi\wedge\omega^{n-q})=0$，但是 $\omega^n/n!$ 是体积元，矛盾。

3. 由 Wirtinger 定理，对于复 d 维的 V，$vol(V)=\dfrac{1}{d!}\int_V\omega^d\neq 0$，于是 $(\eta_V)\neq 0$，否则同理 1 可证。 □

7.2 Hodge 恒等式和 Hodge 分解

对于紧复流形 M 和 Kahler 度量 ds^2，关联 $(1,1)-$ 形式 ω。我们回顾一下已经定义过得 $A(M)$ 上的算子：

$\partial,\bar\partial,d,d^c$，其中 $d^c=\dfrac{\sqrt{-1}}{4\pi}(\bar\partial-\partial)$，那么：

$$dd^c=-d^cd=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial$$

现在定义 Lefschetz 算子 $L:A^{p,q}(M)\to A^{p+1,q+1}(M):\eta\mapsto\eta\wedge\omega$，并令 $\Lambda=L^*$ 为其伴随算子。我们将要看到如果 M 上携带了 Kahler 度量，这些原本在一般情况下没有关联的算子将会满足很多等式，它们被称为 Hodge 恒等式。

定理 7.2.1 (Hodge 恒等式 1). *对于紧 Kahler 流形 M：*

$$[\Lambda,d]=-4\pi(d^c)^*$$

其中 $[A,B]$ 是交换子 $AB-BA$。等价地：

$$[L,d^*]=4\pi d^c$$

或者等价地：

$$[\Lambda,\bar\partial]=-\sqrt{-1}\partial^*$$

$$[\Lambda,\partial]=\sqrt{-1}\bar\partial^*$$

证明. 由于等价性，只需证明最后一式。

首先考虑 $\mathbb{C}^n$ 上的欧式度量情况。由于我们在讨论紧复流形，那么无妨只考虑紧支形式。由线性性，只需考虑单项外积式 $dz_I \wedge d\bar{z}_J$。定义：

$$e_k(dz_I \wedge d\bar{z}_J) = dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

$$\bar{e_k}(dz_I \wedge d\bar{z}_J = d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

$$f_k = e_k^*; \bar{f}_k = \bar{e_k}^*$$

Claim:

A0. $e_j e_k + e_k e_j = 0; f_j f_k + f_k f_j = 0$（这是显然的）

A. $f_k e_k + e_k f_k = 2$

B. $f_k e_j + e_j f_k = 0 \quad j \neq k$

C. $\bar{f}_j e_k + e_k \bar{f}_k = 0 \quad j \neq k$

由于 $e, f, \bar{e}, \bar{f}$ 都是 C^∞ 线性的，因此只需考虑对于基的作用。

A 的证明.

首先计算 $f_k, \bar{f}_k$。如果 $k \notin I$

$$(f_k(dz_I \wedge d\bar{z}_J), dz_R \wedge d\bar{z}_S) = (dz_I \wedge d\bar{z}_J, e_k(dz_R \wedge d\bar{z}_S)) = (dz_I \wedge d\bar{z}_J, dz_k \wedge dz_R \wedge d\bar{z}_S) = 0$$

由 R, S 的任意性，有

$$f_k(dz_I \wedge d\bar{z}_J) = 0, \quad if\ k \notin I$$

同理

$$\bar{f}_k(dz_I \wedge d\bar{z}_J) = 0, \quad if\ k \notin J$$

如果 $k \in I, dz_I = dz_k \wedge dz_{I'}$，那么：

$$(f_k(dz_k \wedge dz_{I'} \wedge d\bar{z}_J), dz_R \wedge d\bar{z}_S) = (dz_k \wedge dz_{I'} \wedge d\bar{z}_J, dz_j \wedge dz_R \wedge d\bar{z}_S) = 2(dz_{I'} \wedge d\bar{z}_J, dz_R \wedge d\bar{z}_S)$$

于是

$$f_k(dz_k \wedge dz_{I'} \wedge d\bar{z}_J) = 2dz_{I'} \wedge d\bar{z}_J, \quad if\ k \in I$$

从而

$$f_k e_k(dz_I \wedge d\bar{z}_J) = f_k(dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J) = \begin{cases} 2dz_I \wedge d\bar{z}_J & if\ k \notin I \\ 0 & if\ k \in I \end{cases}$$

$$e_k f_k(dz_I \wedge d\bar{z}_J) = \begin{cases} (-1)^{\text{sign}} e_k f_k(dz_k \wedge dz_{I'} \wedge d\bar{z}_J) & if\ k \in I \\ 0 & if\ k \notin I \end{cases} = \begin{cases} 2(-1)^{\text{sign}} e_k(dz_{I'} \wedge d\bar{z}_J) & if\ k \in I \\ 0 & if\ k \notin I \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2(-1)^{\text{sign}}(d_k \wedge dz_{I'} \wedge d\bar{z}_J) = 2dz_I \wedge d\bar{z}_J & if\ k \in I \\ 0 & if\ k \notin I \end{cases}$$

因此立刻有 $f_k e_k + e_k f_k = 2$

B,C 的证明与 A 类似，略去。

现在考虑 Lefschetz 算子 L：

$$L(\xi)=\xi\wedge\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum\zeta\wedge dz_j\wedge d\bar{z}_j=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum(e_j\bar{e}_j)(\xi)$$

即 $L=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum e_j\bar{e}_j$，因此伴随算子 $\Lambda=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum f_j\bar{f}_j$。

现在定义

$$\partial_k(\xi)=\sum_{I,J}\frac{\partial\varphi_{IJ}}{\partial z_k}dz_I\wedge d\bar{z}_J$$

$$\bar{\partial}_k(\xi)=\sum_{I,J}\frac{\partial\varphi_{IJ}}{\partial\bar{z}_k}dz_I\wedge d\bar{z}_J$$

接下来需要用到紧支的条件。

Claim. $\partial_k^*=-\bar{\partial}_k;\bar{\partial}_k^*=-\partial_k$，原因如下：

$$(\partial_k^*(\zeta),gdz_R\wedge d\bar{z}_S)=(\xi,\partial_k(gdz_R\wedge d\bar{z}_S))=(\varphi_{RS}dz_R\wedge d\bar{z}_S,\frac{\partial g}{\partial z_k}dz_R\wedge d\bar{z}_S)$$

$$=2^{|R|+|S|}\int\varphi_{RS}\cdot\overline{(\frac{\partial g}{\partial z_k})}=2^{|R|+|S|}\int\varphi_{RS}\cdot(\frac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{z}_k})$$

由分部积分：

$$=-2^{|R|+|S|}\int\frac{\partial\varphi_{RS}}{\partial\bar{z}_k}\bar{g}=(-\bar{\partial}_k(\xi),gdz_R\wedge d\bar{z}_S)$$

因此这就证明了所需结果。

现在通过直接验证可知：

$$\partial=\sum\partial_ke_k=\sum e_k\partial_k;\bar{\partial}=\sum\bar{\partial}_k\bar{e}_k=\sum\bar{e}_k\bar{\partial}_k$$

取伴随，可知

$$\partial^*=\sum\partial_k^*e_k^*=-\sum\bar{\partial}_kf_k=-\sum f_k\bar{\partial}_k;\bar{\partial}^*=-\sum\partial_k\bar{f}_k=-\sum\bar{f}_k\partial_k$$

并且很一般地，$\partial_k,\bar{\partial}_k$ 与 e_k,f_k 都交换。

因此

$$[\Lambda,\partial]=\Lambda\partial-\partial\Lambda$$

$$=\frac{\sqrt{-1}}{2}(\sum_{j,k}f_j\bar{f}_j\partial_ke_k-\sum_{j,k}\partial_ke_kf_j\bar{f}_j)$$

$$=\frac{\sqrt{-1}}{2}(\sum_{j,k}\partial_kf_j\bar{f}_je_k-\sum_{j,k}\partial_ke_kf_j\bar{f}_j)$$

$$=-\frac{\sqrt{-1}}{2}(\sum_{i,k}\partial_k\bar{f}_jf_je_k+\sum_{i,k}\partial_k\bar{f}_je_kf_j)$$

（这里换序运用了 A0,B,C）

$$=-\frac{\sqrt{-1}}{2}(\sum_{j\neq k}\partial_k\bar{f}_j(f_je_k+ekf_j)+\sum_{j=k}\partial_j\bar{f}_j(f_je_j+e_jf_j))=-\sqrt{-1}\sum_j\partial_j\bar{f}_j=\sqrt{-1}\bar{\partial}^*$$

因此我们证明了欧式度量的情况，对于一般的 Kahler 度量情况，通过选取酉标架 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 使得 $d\varphi_i(z_0) = 0$，我们发现上述过程中将欧式度量换成 φ 不会有任何影响。任何内蕴的恒等式（最高仅包含 1 阶导数）只要在 $\mathbb{C}^n$ 上成立，替换成 Kahler 度量不会有任何影响。

□

定理 7.2.2 (Hodge 恒等式 2).

$$[L, \Box_d] = 0; [\Lambda, \Box_d] = 0$$

证明. ω 是 $d-$ 闭的，于是 $d(\omega \wedge \eta) = \omega \wedge d\eta$，即 $[L, d] = 0$。

取伴随即有 $[\Lambda, d^*] = 0$。因此

$$\Lambda(dd^* + d^*d) = d\Lambda d^* - 4\pi(d^c)^*d^* + d^*\Lambda d$$

$$= d\Lambda d^* + d^*(4\pi(d^c)^* + \Lambda d) = (dd^* + d^*d)\Lambda$$

□

定理 7.2.3 (Hodge 恒等式 3).

$$\Box_d = 2\Box_{\bar{\partial}} = 2\Box_\partial$$

证明. 首先我们证明 $\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial = 0$。由于 $[\Lambda, \partial] = \sqrt{-1}\bar{\partial}^*$，我们有：

$$\sqrt{-1}(\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial) = \partial(\Lambda\partial - \partial\Lambda) + (\Lambda\partial - \partial\Lambda)\partial = 0$$

因此

$$\Box_d = (\partial + \bar{\partial})(\partial^* + \bar{\partial}^*) + (\partial^* + \bar{\partial}^*)(\partial + \bar{\partial})$$
$$= (\partial\partial^* + \partial^*\partial) + (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}) = \Box_\partial + \Box_{\bar{\partial}}$$

下面我们来说明 $\Box_\partial = \Box_{\bar{\partial}}$。

这是因为

$$-\sqrt{-1}\Box_\partial = \partial[\Lambda, \bar{\partial}] + [\Lambda, \bar{\partial}]\partial$$

同样对 $\Delta_{\bar{\partial}}$ 进行类似操作，再将换位子展开发现二者相同，其中用到了 $\bar{\partial}\partial = -\partial\bar{\partial}$。 □

推论 7.2.4. *这一结果的直接推论是 $\Box_d$ 保持双次，因为 $\Box_{\bar{\partial}}$ 是保持双次的。*

另外上述恒等式的证明过程说明：$\Box_d, \Box_\partial, \Box_{\bar{\partial}}$ 中的任意一个与 $*, \partial, \partial^*, \bar{\partial}, \bar{\partial}^*, L, \Lambda$ 中的任意一个交换。如果特别闲的话请一个个检验。

首先我们来说明 Hodge 恒等式的直接应用：紧 Kahler 流形上的 Hodge 分解。

定理 7.2.5 (Hodge 分解). *对于紧复 Kahler 流形 X，存在一个自然同构：*

$$\bigoplus_{p+q=r} H^q(X, \Omega_X^p) \cong H_{dR}^r(X, \mathbb{C})$$

以及

$$H^q(X, \Omega_X^p) = \overline{H^p(X, \Omega_X^q)}$$

证明. 取

$$\mathcal{H}_d^{p,q}(M)=\{\eta\in A^{p,q}(M)|\Box_d\eta=0\}$$

$$\mathcal{H}_d^{r}(M)=\{\eta\in A^{r}(M)|\Box_d\eta=0\}$$

那么对于 $\xi\in A^r$，将其按照双次分解为 $\xi=\sum\xi_j,\xi_j\in A^{j,r-j}$。因此 $\Box_d(\xi)=\sum_j\Box_d(\xi_j)$。由前文 $\Box_d$ 保持双次，因此这也是 $\Box_d$ 的型分解结果，于是 $\Box(\xi)=0\iff\Box(\xi_j)=0,\forall j$

因此

$$\mathcal{H}_d^r(M)=\bigoplus_{p+q=r}\mathcal{H}_d^{p,q}(M)$$

然而另一方面：$\Box_d=2\Box_{\bar\partial}$，从而 $\mathcal{H}_d^{p,q}=\mathcal{H}_{\bar\partial}^{p,q}$，统一记为 $\mathcal{H}^{p,q}$。因此由 Hodge 定理：

$$\mathcal{H}_d^{p,q}=\mathcal{H}_{\bar\partial}^{p,q}\cong H_{\bar\partial}^{p,q}\cong H^q(X,\Omega_X^p)$$

同样，利用 d 的 Hodge 定理，有 $\mathcal{H}_d^r\cong H_{dR}^r(X,\mathbb{C})$。

因此我们有了某个可能依赖度量的同构：$\bigoplus_{p+q=r}H^q(X,\Omega_X^p)\cong H_{dR}^r(X,\mathbb{C})$.

现在记 $H^{p,q}(M)=Z_d^{p,q}/(dA^*\cap Z_d^{p,q})$，于是 $H^{p,q}$ 是所有存在 (p,q) 代表元的 de Rham 上同调类，因此与度量无关。

对于一个 $(p,q)-$ 型 $d-$ 闭形式 η，$d-$Hodge 定理指出：

$$\eta=\mathcal{H}(\eta)+dd^*G(\eta)+d^*dG(\eta)$$

由于 $\Box$ 和 d 交换，那么 G 也是如此，但是 $d\eta=0$，于是 $\eta=\mathcal{H}(\eta)+dd^*G(\eta)$，但是 $\Box G$ 保持双次，于是 $\mathcal{H}(\eta)$ 也是 $(p,q)-$ 型的，因而有自然同构：

$$H^{p,q}\cong\mathcal{H}^{p,q}$$

，从而说明前述同构是自然的。

对于共轭部分，只需注意 $\Box_d$ 是实算子，于是 $\overline{\Box_d(\eta)}=\Box_d(\bar\eta)$，那么就立刻得到了证明。 □

推论 7.2.6. 对于紧 *Kahler* 流形（特别地如果 X 是非奇异的复射影簇），那么 X 的奇数阶 *Betti* 数是偶数。

证明. 由 Hodge 分解：$b_{2r+1}=2\sum_{0\le p\le r}h^{p,2r+1-p}$。 □

推论 7.2.7.

$$H^q(\mathbb{C}P^n,\Omega^p)=H_{\bar\partial}^{p,q}(\mathbb{C}P^n)=\begin{cases}0 & p\neq q\\ \mathbb{C} & p=q\end{cases}$$

证明. 由于 $H^{2k+1}(\mathbb{C}P^n,\mathbb{Z})=0$（利用胞腔上同调即可），当然有 $p+q$ 为奇数时 $H_{\bar\partial}^{p,q}(\mathbb{C}P^n)=0$

而 $H^{2k}(\mathbb{C}P^n,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$，那么对于 $p\neq k$ 有：

$$1=b_{2k}(\mathbb{C}P^n)\ge h^{p,2k-p}(\mathbb{C}P^n)+h^{2k-p,p}(\mathbb{C}P^n)=2h^{p,2k-p}$$

于是 $h^{p,2k-p}=0$，从而得证。 □

特别地，这个推论说明 $\mathbb{C}P^n$ 上不存在非零的全纯形式。更一般地，有

推论 7.2.8. *对于紧 Kahler 流形，全纯 $p-$ 形式总是 $d-$ 调和的。*

证明. 注意 $\bar{\partial}=0$ 因为全纯，$\bar{\partial}^*$ 天然为 0，于是得证。 □

推论 7.2.9 ($\partial\bar{\partial}$ 引理). *给定紧流形 X 上的 d-闭形式 α（即 $d\alpha=0$），那么以下等价：*

1. *α 是 d-恰当的*
2. *α 是 ∂-恰当的*
3. *α 是 $\bar{\partial}$-恰当的*
4. *α 是 $\partial\bar{\partial}$ 恰当的*
5. *α 位于调和形式 $\mathcal{H}^{p,q}(X)$ 的正交补空间中（这里的调和是指 $d-$ 调和，等价地，$\partial-$ 调和，$\bar{\partial}-$ 调和（Kahler 流形）*

证明. 由 Hodge 分解，条件 5 可以由条件 1 4 推出；并且条件 4 可以推出条件 1 3，那么只需说明条件 5 推出条件 4.

取定 $d-$ 闭的形式 $\alpha\in A^{p,q}(X)$，如果 α 和调和形式正交，那么对 ∂ 算子做 Hodge 分解，由于 α 是 $d-$ 闭的，从而是 ∂ 闭的，从而（关于 ∂ 的）Hodge 分解给出了：

$$\alpha=\Delta(G\alpha)=\partial\gamma,\exists\gamma$$

现在对 γ 关于 $\bar{\partial}$ 算子做 Hodge 分解，就有

$$\gamma=\bar{\partial}\beta+\bar{\partial}^*\beta'+\beta'',\exists\beta''\ harmonic.$$

因此 $\alpha=\partial\bar{\partial}\beta+\partial\bar{\partial}^*\beta'$（注意调和形式 β'' 在 ∂ 作用下是零）。

现在 $\partial\bar{\partial}^*=-\bar{\partial}^*\partial,\bar{\partial}\alpha=0$，于是

$$0=\bar{\partial}\alpha=\bar{\partial}\partial\bar{\partial}\beta+\bar{\partial}\partial\bar{\partial}^*\beta'=-\bar{\partial}\bar{\partial}\partial\beta-\bar{\partial}\bar{\partial}^*\partial\beta'$$

$$=-\bar{\partial}\bar{\partial}^*\partial\beta'$$

即 $\bar{\partial}\bar{\partial}^*\partial\beta'=0$。

现在

$$0=(\bar{\partial}\bar{\partial}^*\partial\beta',\partial\beta')=||\bar{\partial}^*\partial\beta'||^2$$

因此 $\partial\bar{\partial}^*\beta'=-\partial^*\partial\beta'=0$，从而 $\alpha=\partial\bar{\partial}\beta$。

□

7.3 Lefschetz 分解

我们先来介绍一下 Lefschetz 分解的梗概。思路是很简单的，计算发现存在一个 $\mathfrak{sl}_2 \to End(H^*(M))$ 的同态，于是有了李代数的一个表示，从而可以利用表示论给出一些有用的结果。

命题 7.3.1. *对于紧 Kahler 流形 X，在 $A^{p,q}(X)$ 上 $[L,\Lambda]=p+q-n, n=\dim_{\mathbb{C}}X$。因此 $[L,\Lambda]$ 在 $A^\bullet(X)$ 是对角算子，各个特征子空间为 $A^r(X)$，特征值为 $r-n$。*

证明. 正如之前所述的，$L,\Lambda d$ 都只包含最多到 1 阶导数的结果，因此仍然可以假定度量为欧式度量。回忆前文：

$$L=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum e_j\bar{e}_j;\Lambda=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum \bar{f}_jf_j$$

于是

$$[L,\Lambda]=\frac{1}{4}(\sum_{j,k}e_j\bar{e}_j\bar{f}_kf_k-\bar{f}_kf_ke_j\bar{e}_j)$$

对于 $j\neq k$，利用 Hodge 恒等式证明中的 A,B,C，知其为 0。因此只需考虑 $j=k$ 的情况，又由于 $f_je_j=2-e_jf_j$，于是

$$\begin{aligned}
[L,\Lambda]=\frac{1}{4}\sum_j(e_j\bar{e}_j\bar{f}_jf_j-\bar{f}_jf_je_j\bar{e}_j)&=\frac{1}{4}\sum_j(e_j\bar{e}_j\bar{f}_jf_j-\bar{f}_je_jf_j\bar{e}_j-2\bar{f}_j\bar{e}_j)\\
&=\frac{1}{4}\sum_j(e_j\bar{e}_j\bar{f}_jf_j-\bar{f}_je_j\bar{e}_jf_j-2\bar{f}_j\bar{e}_j)\\
&=\frac{1}{4}\sum_j(e_j\bar{e}_j\bar{f}_jf_j-e_j\bar{f}_j\bar{e}_jf_j-2\bar{f}_j\bar{e}_j)\\
&=\frac{1}{4}\sum_j(e_j\bar{e}_j\bar{f}_jf_j-e_j\bar{e}_j\bar{f}_jf_j+2e_jf_j-2\bar{f}_j\bar{e}_j)\\
&=\sum_j\left(1-\frac{1}{2}(f_je_j+\bar{f}_j\bar{e}_j)\right)=n-\frac{1}{2}\sum_j(f_je_j\bar{f}_j\bar{e}_j)
\end{aligned}$$

对于 $\xi=dz_I\wedge d\bar{z}_J,\#I=p,\#J=q$，前文的计算指出：

$$f_je_j(dz_I\wedge d\bar{z}_J)=\begin{cases}0 & j\in I\\ 2dz_I\wedge d\bar{z}_J & j\notin I\end{cases}$$

$$f_je_j(dz_I\wedge d\bar{z}_J)=\begin{cases}2dz_I\wedge d\bar{z}_J & j\in J\\ 0 & j\notin J\end{cases}$$

于是代入即可知 $\sum(f_je_j+\bar{f}_j\bar{e}_j)(dz_I\wedge d\bar{z}_J)=(4n-2p-2q)dz_I\wedge d\bar{z}_J$，从而说明了 $[L,\Lambda]=n+p+q-2n=p+q-n$。 □

现在记 $\mathfrak{H}=[\Gamma,L]=\sum_r(n-r)pr_r$，其中 pr_r 是到 r 阶形式的投影。

简单的计算发现：

$$[\mathfrak{H},L]=-2L;[\mathfrak{H},\Lambda]=2\Lambda;[\Lambda,L]=\mathfrak{H}$$

现在考虑李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$（全体迹为 0 的 2×2 复矩阵构成的代数），其生成元为：

$$x=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix};y=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix};h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

那么

$$[x,y]=h;[h,x]=2x;[h,y]=-2y$$

因此 $h\mapsto \mathcal{H}, x\mapsto \Lambda, y\mapsto L$ 给出了一个 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 在 $A^{\bullet}(X)$ 上的表示。另一方面，$\square_d$ 与 $\Lambda, L, \mathfrak{H}$ 都交换，因此这进一步给出了 $d-$ 调和形式上的表示。由 Hodge 定理，这给出了一个表示

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\longrightarrow H^{\bullet}(X)$$

注意由于我们讨论的都是紧 Kahler 流形 X，那么 $H^{\bullet}(X)$ 是有限维 $\mathbb{C}-$ 线性空间。

7.3.1 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维复表示

下面我们给出一些李代数表示论的结果。对于一个 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 在 V（有限维 $\mathbb{C}$ 线性空间上的表示），这等价于一个李代数同态 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\longrightarrow End_{\mathbb{C}}(V)$。

由于李群 $SL(2,\mathbb{C})$ 是连通且单连通的，那么李代数的表示和单连通李群的表示一一对应（这个对应关系当然也保持了不可约性）。对于紧李群 G，V 是有限维 $\mathbb{C}$ 线性空间，以及其上的 Hermitian 度量 h，$d\sigma$ 是 G 的 Haar 测度，那么定义：

$$h_0(v,w)=\int_G h(\sigma v,\sigma w)d\sigma$$

于是 h_0 是左不变的 Hermitian 度量。

对于 $W\subseteq V$ 是 V 的子表示，选出其关于 h_0 的正交补空间，那么由于 h_0 是 $G-$ 不变的，补空间 $W^{\perp}$ 也是一个子表示，因此有直和分解 $V=W\oplus W^{\perp}$（作为 $\mathbb{C}[G]-$ 模）

于是我们得到：

引理 7.3.2 (Weyl-Hurwitz). *每个紧李群 G 的有限维表示都是若干不可约表示的直和。*

由于 $SU(2,\mathbb{C})$ 是紧的，其复化是 $SL(2,\mathbb{C})$。因此引理 7.3.2对 $SL(2,\mathbb{C})$ 成立，于是对李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 也成立。

总结一下：**每个有限维 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 复表示都是若干不可约表示的直和。**

下面我们来研究不可约表示，设为 V。考虑 h 作用在 V 上的特征空间：记 $V_\lambda=\{v|h(v)=\lambda v\}$。如果 v 是 h 的某个特征向量，那么 $x(v)\in V_{\lambda+2};y(v)\in V_{\lambda-2}$。这是很容易验证的：

$$h(x(v))=[h,x](v)+xh(v)=2x(v)+\lambda x(v)=(\lambda+2)x(v)$$

因此进一步地，有 $x^r(v)\in V_{\lambda+2r};y^r(v)\in V_{\lambda-2r}$。但是 V 是有限维的，于是其特征根肯定有限，从而对于充分大的 r，有 $x^r(v)=0;y^r(v)=0$。即：**对于 h 的特征向量，x,y 作用在其上都是幂零的。**

定义 7.3.3 (Lefschetz). $v\in V$，V 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的某个有限维表示空间。称它是本原 (primitive) 的，如果它非零，且是 h 的特征向量并且 $x(v)=0$。

存在性说明如下：h 肯定存在一个特征根 λ，$v \in V_\lambda$。由幂零性，存在一个最小的 r 使得 $x^r(v) \neq 0, x^{r+1}(v) = 0$，那么 $x^r(v)$ 就是一个本原的元素。

命题 7.3.4. *对于 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维不可约复表示 V，任取一个本原向量 $v \in V$，那么向量组*

$$v, y(v), \cdots, y^t(V)$$

（满足它们均非 0 且 $y^{t+1}(v) = 0$）构成了 V 的一组基。于是：

$$\dim_{\mathbb{C}} V = t + 1$$

对任何两个本原的向量 v，Y 的幂零指数（最小使之成为 0 的幂次）都是相同的。

证明. 考虑 $W = \mathrm{span}(v, y(v), \cdots, y^t(v))$，只需说明 h, x, y 作用下 W 封闭，这样不可约性能够帮助我们得到结果。

y 的封闭性是简单的。$hy^r(v) = (\lambda - 2r)y^r(v), h(v) = \lambda v$ 也说明了封闭性。

对于 x，我们归纳地证明 $xy^l(v) \in W$。$l = 0$ 时 $x(v) = 0$，奠基显然。假定 $l-1$ 时命题成立：

$$xy^l(v) = xyy^{l-1}(v) = (h + yx)(y^{l-1}(v)) = (\lambda - 2(l-1))y^{l-1}(v) + yxy^{l-1}(v)$$

由归纳假设命题得证，从而我们说明了 $W = V$。

另一方面 $v, y(v), \cdots, y^t(v)$ 的特征值各不相同，从而线性无关，因此构成了基。命题得证。 □

称 h 的特征空间为 weight space，其权就是其特征根。因此

推论 7.3.5. *$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的不可约复表示 V 是若干个 1 维 weight space 的直和：$V = \oplus V_\lambda$。*

命题 7.3.6. *对于 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维复表示 V，h 的特征值都是整数。特别地如果 V 是不可约的，它们一定是*

$$-t, -t+2, \cdots, t-2, t$$

其中 $t + 1 = \dim_{\mathbb{C}} V = Y$ 的幂零指数。因此将这个结果和上一命题结合，全体不可约 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 表示与非负整数 t 一一对应：

$$V(t) = V_{-t} \oplus V_{-t+2} \oplus \cdots V_{t-2} \oplus V_t$$

证明. 由于 V 是有限维的，存在本原元素 v，以及其权重 λ。我们现在归纳证明 $xy^l(v) = (l\lambda - l(l-1))y^{l-1}(v)$。

$l = 0$ 平凡，假定 l 已证：

$$xy^{l+1}(v) = xyy^l(v) = h(y^l(v)) + yxy^l(v) = (\lambda - 2l)y^l(v) + y(l\lambda - l(l-1))y^{l-2}(v)$$

$$= ((l+1)\lambda - (l+1)l)y^l(V)$$

由于存在最小的 t 使得 $y^t(v) \neq 0, y^{t+1}(v) = 0$，取 $l = t+1$ 即有：

$$0 = xy^{t+1}(v) = ((t+1)\lambda - (t+1)t)y^l(v)$$

于是 $\lambda = t$，是一个整数。考虑之前本原元素的构造，可知这能够说明任何特征根都是整数（本原元素的特征值和作为构造基础的向量的特征值之间相差一个偶数）。

现在假定 V 是不可约的，t 是 V 的最大权。取特征向量 v，那么 $x(v)$ 有权 $t+2$，因此只能 $x(v) = 0$。现在将命题 7.3.4应用到此即得到了证明。 □

注记. $V(t)$ 的一个很有用的描述是 $V(t) = Sym^t(\mathbb{C}^2)$，即二元 t 次齐次多项式构成的组合。其中 $\mathfrak{sl}$ 的作用就是切映射：

$$X = x\frac{\partial}{\partial y}, Y = y\frac{\partial}{\partial x}, H = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

（为了区分未定元这里 X, Y, H 就是指原来的 x, y, h）

计算知，$x^k, x^{k-1}y, \cdots, xy^{k-1}, y^k$ 恰好是诸 weight space$V_k, \cdots, V_{-k}$ 的生成元。

因此容易看出 $y^k : V_k \to V_{-k}; x^k : V_{-k} \to V_k$ 均为同构。

7.3.2 Hard Lefschetz 定理

对于一个一般的 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的有限维复表示 V，定义 $PV = \ker x$。我现在声称有如下直和分解：

$$V = PV \oplus yPV \oplus y^2PV \oplus \cdots$$

这是简单的，因为我们可以将 V 分解成若干不可约表示，i.e. $Sym^t(\mathbb{C}^2)$。这个情况是简单的，因为 $PV = \mathbb{C} < x^t >$，剩余结果可以直接验证。于是我们可以将每个不可约表示对应的直和分解拼凑回来，即得到了这个直和分解。它称为 V 的 Lefschetz 分解。

上述思路可以证明一般的结果：

命题 7.3.7. *对于 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的有限维复表示 V，它也可以写为若干权空间的直和 $\oplus V_\lambda$。并且 λ 的排列是关于 0 对称的，并且仍然有 $y^k : V_k \to V_{-k}$ 以及 $x^k : V_{-k} \to V_k$ 是同构。*

证明. 这不过是将 V 拆分成不可与表示后再将它们合并得到的结果。 □

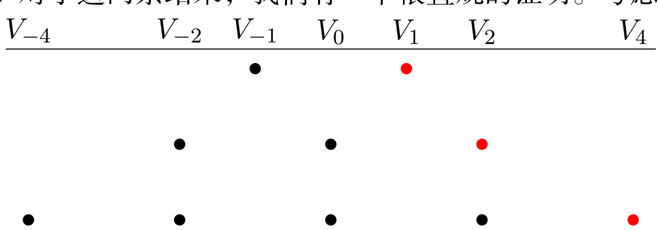
现在我们希望将 Lefschetz 分解限制到权空间 V_k 上。首先证明如下结果：

引理 7.3.8.

$$V_k \cap \ker x = \ker(y^{k+1} : V_k \longrightarrow V_{-k-2})$$

$$V_k \cap y^r \ker(x) = y^r(V_{k+2r} \cap \ker(x))$$

证明. 对于这两条结果，我们有一个很直观的证明。考虑一个点阵图：



在这个图表中，每一行对应着一个不可约表示 Sym^k，行中的点则是其各个权空间。因此按照权将它们对其则得到了一个轴对称的图表，而 V 正是这些点的直和。

在图表中 y 的作用就是向左平移 2 个单位（降权算子），x 则为向右平移 2 个单位（提权算子），$\ker x$ 由每行最右端组成（红色点）。于是 $V_k \cap \ker x$ 为 V_k 这一列中全体在行最右端的元素，那么由于点阵关于 0 的对称性，自然这等价于其在映射 $V_k \to V_{-k-2}$ 下的像为 0。

同样，$V_k \cap y^r \ker x$ 是 V_k 这一列中全体在行中从右往左数第 $r+1$ 个的元素。这等价于 V_{k+2r} 中在行中最右端的元素向左平移 $2r$，因此立刻就有了目标结果。 □

于是现在将 Lefschetz 分解限制在 V_k 上，即有：

$$V_k = [V_k \cap \ker x] \oplus [V_k \cap y \ker x] \oplus \cdots$$

$$= (V_k \cap \ker x) \oplus y(V_{k+2} \cap \ker x) \oplus y^2(V_{k+4} \cap \ker x) \oplus \cdots$$

回到紧 Kahler 流形 X。下面令 $V = H^\bullet_{dR}(X, \mathbb{C}) = \oplus_{r=0}^{2n} H^r_{dR}(X, \mathbb{C})$，那么由前文所述有一个其上的 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的表示：$x \to \Lambda, y \to L, h \to \mathfrak{H}$。

现在直接验证发现 $H^r_{dR}(X, \mathbb{C})$ 正是一个 weight space，其权重（特征值）为 $n-r$。（回顾 $\mathfrak{H}$ 的性质）因此我们现在有了一个同构 $L^k : H^{n-k}_{dR}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n+k}_{dR}(X, \mathbb{C})$。

我们再定义本原上同调（primitive cohomology)

$$P^{n-k} = \ker \Lambda \cap H^{n-k}_{dR} = \ker(L^{k+1} : H^{n-k}_{dR} \longrightarrow H^{n+k+2}_{dR})$$

那么由 Lefschetz 分解在 V_k 上的限制，有：

$$H^r_{dR}(X) = P^r(X) \oplus LP^{r-2}(X) \oplus \cdots \oplus L^{[r/2]} P^{r-2[r/2]}(X)$$

序列终止，因为对于超界的指标这样的项是 0。（点阵图的直观就是越过了最大特征值所在的列）

将这一段讨论总结起来，就是

定理 7.3.9 (Hard Lefschetz 定理). *对于紧 Kahler 流形 X*

1. $L^k : H^{n-k}_{dR}(X) \longrightarrow H^{n+k}_{dR}(X)$ 是同构。

2. de Rham 上同调存在 Lefschetz 分解：

$$H^r_{dR}(X) = P^r(X) \oplus LP^{r-2}(X) \oplus \cdots \oplus L^{[r/2]} P^{r-2[r/2]}(X)$$

3. 本原上同调和 Hodge 分解是相容的，即：令 $P^{p,q} = P^r \cap H^{p,q}_{\bar\partial}$，那么 $P^r = \oplus_{p+q=r} P^{p,q}$。于是一个 de Rham 上同调类是本原的当且仅当其各个分量是本原的。

（第 3 点的证明是容易的，因为 P^r 就是利用 $H^r \cap \ker \Lambda$ 定义而来，并且 L, Λ 均保持双次改变方式 $(+1, +1); (-1, -1)$。

Lefschetz 定理的几何意义

对于一个 $\mathbb{C}P^N$ 中的闭子复流形 X，其上度量为 Fubini-Study 度量的拉回，$n = \dim_{\mathbb{C}}(X)$。考虑关联的 (1,1) 形式 $\omega = \dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi} \log ||F||^2$，其中 $F : U \subset \mathbb{C}P^N \to \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ 是局部的提升。那么 ω 是实 $(1,1)$ 形式，$d-$ 闭但不是 $d-$ 恰当的。

一些计算 [Gal07, Page 147] 表明，Lefschetz 同构 $L^k : H^{n-k} \to H^{n+k}$ 的 Poincare 对偶变成了相交形式 $H_{n+k} \stackrel{\cap \mathbb{C}P^{N-k}}{\longrightarrow} H_{n-k}$。于是 Lefschetz 定理说明这也是一个同构。

我们来看看本原上同调在这里扮演了什么角色。首先有正合列：

$$0 \longrightarrow P^{n-k}(X) \longrightarrow H^{n-k}(X) \stackrel{L^{k+1}}{\longrightarrow} H^{n+k+2}(X)$$

取对偶后变为

$$H_{n+k+2}(X) \stackrel{\cap \mathbb{C}P^{N-(k+1)}}{\longrightarrow} H_{n-k}(X) \longrightarrow P_{n-k}(X) \longrightarrow 0$$

而第一个箭头可以分解为 $\cap H$ 和 $\cap \mathbb{C}P^{N-k}$，其中 H 为 ω 的对偶。

因此一个 $n-k$ 维闭子流形是本原的，如果它和无穷远平面不交，即如果它是从 $H_{n-k}(X - X \cap H)$ 中诱导出来的。

Hodge-Riemann 双线性关系

对于紧复流形，由于 Poincare 对偶，有 $H^{n-k}(X, \mathbb{R}) \otimes H^{n+k}(X, \mathbb{R}) \longrightarrow H^{2n}(X, \mathbb{R}) \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \mathbb{R}$。这个映射由 $([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_X \alpha \wedge \beta$ 给出。

由 Hard Lefschetz 定理，β 一定能被唯一地写为 $L^k(\gamma)$。因此我们定义出了一个 $H^{n-k}(X)$ 上的双线性型：

$$Q_{n-k}(\alpha, \gamma) = \int_X \alpha \wedge L^k \gamma = \int_X \alpha \wedge \gamma \wedge \omega^k$$

它满足如下性质：

1. $n-k$ 是偶数时 Q_{n-k} 是对称的；2. $n-k$ 是奇数时 Q_{n-k} 是交错的；

3. Q_{n-k} 是实形式：因为 ω 是实形式。

由 Hodge 分解 $H^{n-k}(X, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=n-k} H^{p,q}_{\bar{\partial}}$。那么对于任何 $\alpha \in H^{p,q}; \beta \in H^{p',q'}, Q(\alpha, \beta) = 0$ 除非 $p = q', p' = q$。这是因为若需要其非零，$\alpha \wedge \beta \wedge \omega^k$ 一定是 (n, n) 型的，那么这就诱导出结果。

4. $Q(\alpha, \beta) \neq 0 \implies p = q' \textit{ and } q = p'$.

因此

$$W_{n-k}(\alpha, \beta) = (\sqrt{-1})^{n-k} Q_{n-k}(\alpha, \bar{\beta})$$

是 $H^{n-k}(X, \mathbb{C})$ 上的 Hermitian 形式：这是容易直接验证的。

引理 7.3.10. *对于紧 Kahler 流形 X，$\dim_{\mathbb{C}}(X) = n$，$\eta \in A^{p,q}(X) \subseteq A^k(X)$ 并且 $[\eta]$ 是本原的，那么*

$$\overline{*\eta} = (-1)^{\binom{k+1}{2}} (\sqrt{-1})^{p-q} \frac{1}{(n-k)!} L^{n-k} \eta$$

证明是相当简单的，仍然可以假定度量为欧式度量，证明只是一些计算罢了。

定理 7.3.11 (Hodge-Riemann 双线性关系)**.** *对于紧 Kahler 流形 $X, \dim_{\mathbb{C}}(X) = n$，对于 $H^{n-k}(X, \mathbb{C})$，有：*

1. W_{n-k} 使得 Hodge 分解和 Lefschetz 分解均成为正交分解。

2. 在本原部分 $P^{p,q}$ 中，$(-1)^{\binom{n-k}{2}} (\sqrt{-1})^{p-q-(n-k)} W_{n-k}$ 是正定的。

3. W_{n-k} 作用在 $L^l P^{n-k-2l}$ 上诱导了 P^{n-k-2l} 的 Hermitian 内积，它就是 $(-1)^l W_{n-k-2l}$。

证明.

1. Hodge 分解是正交的，由性质 4 可以迅速看出。由于 L 是实算子，可以无妨考虑 Q_{n-k}。现在假定 $\xi = L^m\xi', \eta = L^t\eta'$，并且 ξ', η' 都是本原的。如果它们不在 Lefschetz 分解的同一部分内，那么 $m \neq t$，无妨 $m < t$。为记号简便，假定 $\xi, \eta \in H^r$。

因此

$$Q(\xi,\eta) = Q(L^m\xi', L^t\eta') = \int_X \xi' \wedge \eta' \wedge \omega^{n-r+m+t} = \int_X L^{n-r+m+t}\xi' \wedge \eta'$$

简单的计算指出 $n-r+m+t \geq n-r+2m+1$。但是由本原性 $L^{n+1-r+2m}\xi' = 0$，从而就证明了目标结果。

2. 由引理，对于 $\xi \in P^{p,q}, p+q=k$：

$$*\xi = (-1)^{\binom{k+1}{2}}(\sqrt{-1})^{p-q}\frac{1}{(n-k)!}L^{n-k}\bar{\xi}$$

即：

$$L^{n-k}\bar{\xi} = (-1)^{\binom{k+1}{2}}(-1)^{p-q}(\sqrt{-1})^{q-p}(n-k)! * \xi$$

现在如果 $\xi \in P^{p,q}, p+q = n-k$，那么：

$$\begin{aligned} L^k\bar{\xi} &= (-1)^{\binom{n-k+1}{2}}(-1)^{p-q}(\sqrt{-1})^{q-p}k! * \xi \\ &= (-1)^{\binom{n-k}{2}}(-1)^{p-q}(\sqrt{-1})^{q-p}k! * \xi \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} (-1)^{\binom{n-k}{2}}(\sqrt{-1})^{p-q-(n-k)}W(\xi,\xi) &= (-1)^{\binom{n-k}{2}}(\sqrt{-1})^{p-q}Q(\xi,\bar{\xi}) \\ &= (-1)^{\binom{n-k}{2}}(\sqrt{-1})^{p-q}\int_X \xi\wedge\bar{\xi}\wedge\omega^k \\ &= (-1)^{\binom{n-k}{2}}(\sqrt{-1})^{p-q}\int_X \xi\wedge L^k\bar{\xi} \\ (\text{previous result}) &= (-1)^{\binom{n-k}{2}}(\sqrt{-1})^{p-q}(-1)^{\binom{n-k}{2}}(-1)^{p-q}(\sqrt{-1})^{q-p}k!\int_X \xi\wedge *\xi \\ i &= k!||\xi||^2_{L^2} > 0 \end{aligned}$$

3. 设 $\xi = L^l\xi'; \eta = L^l\eta'$。那么前文结果已说明（依旧假定 $r = n-k$）:

$$\begin{aligned} W_r(\xi,\eta) &= (\sqrt{-1})^r Q_r(\xi,\bar{\eta}) = (\sqrt{-1})^r Q_{r-2l}(\xi',\bar{\eta}') \\ &= \frac{(\sqrt{-1})^r}{(\sqrt{-1})^{r-2l}}W_{r-2l}(\xi',\eta') = (-1)^l W_{r-2l}(\xi',\eta') \end{aligned}$$

□

推论 7.3.12.

$$H^{p,0} = P^{p,0}; H^{0,p} = P^{0,p}$$

证明. 只需证明一个等式即可。对于 $\xi \in H^{p,0}$，由前文结果它是本原的 $\iff$ $L^{n+1-p}(\xi) = 0$，但是计算双次知这是肯定的。 □

Lefschetz 分解的进一步限制得到了 $H^{p,q} = \oplus_{0\le k\le[(p+q)/2]} L^k P^{p-k,q-k}$。因此 $H^{p,q} = P^{p,q} \oplus H^{p-1,q-1}$：此段存疑。

推论 7.3.13.

$$h^{p,q} = \dim P^{p,q} + h^{p-1,q-1} \quad p+q \le n$$

$$h^{p,q} \ge h^{p-1,q-1} \quad p+q \le n$$

推论 7.3.14. *在紧 Kahler 流形 X 上，Q_r 在 $H^r(X,\mathbb{C})$ 上总是非退化的。*

证明. 由于 $H^r = \oplus L^k P^{r-2k}$ 是 $Q-$ 正交分解，只需观察各个因子，但是在其上由 Hodge-Riemann 双线性关系都是正定的（或负定），因此非退化。 □

对于 n 是偶数时，Q 在 H^n 上是对称非退化且实的形式，由 Sylvester 惯性定理，它被其惯性指数唯一确定，记为 $\mathrm{sign}(Q)$。定义 X 的指标 $I(X) = \mathrm{sign}(Q)$。其中 Q 是 $H^n(X,\mathbb{C})$ 上的相交形式，它正是 Q_n。（n 是偶数）

定理 7.3.15 (Hodge 指标定理)**.** *对于复偶数维紧 Kahler 流形 X，$\dim_{\mathbb{C}}(X) = n = 2r$，那么：*

$$I(X) = \sum_{p,q} (-1)^p h^{p,q} = \sum_{p+q\ even} (-1)^p h^{p,q}$$

证明. 由 Lefschetz 分解：$H^n(X,\mathbb{C}) = \oplus L^k P^{n-2k}(X)$。这是 Q 的正交分解，并且型分解也是正交分解。那么：

$$I(X) = \mathrm{sign}(Q) = \sum \mathrm{sign}(Q)|_{P^{n-2k}} = \sum_{0\le k\le n/2} \mathrm{sign}(W)|_{P^{n-2k}} = \sum_{0\le k\le n/2} \sum_{p+q=n-2k} \mathrm{sign}(W)|_{P^{p,q}}$$

然而 $\dim P^{p,q} = h^{p,q} - h^{p-1,q-1}$，并且 W 早 $P^{p,q}$ 是正定/负定的（Hodge-Riemann），因此计算其惯性指数即可得到结果：

$$I(X) = \sum_{p+q\ even, p+q\le n} (-1)^p \dim P^{p,q} = \sum_{p+q\ even, p+q\le n} (-1)^p (h^{p,q} - h^{p-1,q-1})$$

$$= \sum_{p+q=n} (-1)^p h^{p,q} - \sum_{p+q=n} (-1)^p h^{p-1,q-1} + \sum_{p+q=n-2} (-1)^p h^{p,q} - \sum_{p+q=n-2} (-1)^p h^{p-1,q-1} + \cdots$$

$$= \sum_{p+q=n} (-1)^p h^{p,q} + 2 \sum_{p+q\ even, p+q<n} (-1)^p h^{p,q}$$

由于 n 是偶数，并且由 Hodge 分解，$(-1)^{n-p} h^{n-p,n-q} = (-1)^p h^{p,q}$，那么

$$I(X) = \sum_{p+q=n} (-1)^p h^{p,q} + \sum_{p+q\ even, p+q\ne n} (-1)^p h^{p,q} = \sum_{p+q\ even} (-1)^p h^{p,q}$$

同样利用 Hodge 分解可以类似地证明 $\sum_{p+q\ odd} (-1)^p h^{p,q} = 0$，这样就得到了全部所需结果。 □

下面我们考虑 $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$ 的情况，此时 $I(X) = 2 + 2h^{0,2} - h^{1,1}$。但是 $h^{0,2} = p_g =$ 几何亏格。因此 $I(X) = 2 + 2p_g - h^{1,1}$。由 Lefschetz，$h^{1,1} = p^{1,1} + 1$。

现在考虑 Q 在 $H^{1,1}(X)$ 上的限制。那么 $H^{1,1} = P^{1,1} \oplus_{\perp} LP^{0,} = P^{1,1} \oplus_{\perp} LH^{0,0}$。

因此 $\mathrm{sign}(Q)|_{H^{1,1}} = \mathrm{sign}(Q)|_{P^{1,1}} + \mathrm{sign}(Q)|_{H^{0,0}}$。利用 Hodge-Riemann 计算知 Q 在 $P^{1,1}$ 上负定，在 $H^{0,0}$ 上 $Q > 0$。那么：

$$\mathrm{sign}(Q)|_{H^{1,1}} = 1 - \dim_{\mathbb{C}} P^{1,1}$$

并且一个对应着正特征值的特征向量正是 $[\omega]$。因此

推论 7.3.16 (复曲面上全纯闭子流形的 Hodge 指标定理). 对于 $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 2$ 的紧 *Kahler* 流形，可以选择 $H^{1,1}$ 的一组基使得：

a. 第一个基向量是 $[\omega]$ 的某个倍数。

b. 在这组基下 Q 的矩阵表达为 $\mathrm{diag}(1, -1, \cdots, -1)$。

再来考虑 $\mathrm{sign}(Q)$ 在 $H^{1,0}; H^{0,1}$ 上的情况。前文已证 $H^{1,0} = P^{1,0}; H^{0,1} = P^{0,1}$。同样，可以计算其正负定性。

在章节的最后，需要指出 Lefschetz 的理论最后仍然是拓扑的（这在上文中的一些情况以及 [Gal07, Page 154] 提供的例子中都可以看出），但是 Hodge 分解反应了流形的解析结构。例如对于一个实流形，然后赋予两个不同的 Kahler 复结构，Hodge 分解可能相差很大。事实上 $(H^{p,q}(X) \oplus H^{q,p}(X)) \cap H^{p+q}(X, \mathbb{Z})$ 的秩可能会不同。

7.4 Kahler 几何

约定. 指标中携带 $^-$ 代表接受 $\partial/\partial\bar{z}$ 型的切向量

我们来具体计算 Kahler 流形上的几何量。对于切丛上的度量 g，Chern 联络由 $\omega = g^{-1}\partial g = (g^{i\bar{q}}\partial g_{j\bar{q}})$ 给出，这里 $g_{i\bar{j}} = g(\partial/\partial z^i, \partial/\partial\bar{z}^j)$.

因此 Chern 联络的 Christoffel 记号是 $\Gamma^i_{kj} = g^{i\bar{q}}\dfrac{\partial g_{j\bar{q}}}{\partial z^k}$. 由于 Chern 联络是 $(1,0)$-型的，$\Gamma^i_{\bar{k}j} = 0$.

同样由于 Chern 联络将全纯切向量映为全纯切向量（复结构相容性），这就有 $\Gamma^{\bar{i}}_{kj} = \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{k}j} = 0$.（回忆 Christoffel 记号的三个指标的意义）取复共轭后就得到了：Christoffel 记号非零仅当它形如 $\Gamma^i_{kj} = \Gamma^{\bar{i}}_{\bar{k}\bar{j}}$.

下面来看曲率：$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = \bar{\partial}\omega = \bar{\partial}(g^{-1}\partial g)$，那么 $\Omega^i_j = \bar{\partial}(g^{i\bar{q}}\partial g_{j\bar{q}})$，

$$R(X,Y)\frac{\partial}{\partial z^j} = \Omega^i_j(X,Y)\frac{\partial}{\partial z^i}$$

我们类似地定义 Riemann 曲率：$R(X,Y,Z,W) = g(Z, R(X,Y)W)$，计算：

$$R_{\bar{k}l\bar{p}j} = g(\frac{\partial}{\partial\bar{z}^p}, R(\frac{\partial}{\partial\bar{z}^k}, \frac{\partial}{\partial z^l})\frac{\partial}{\partial z^j}) = g(\frac{\partial}{\partial\bar{z}^p}, \Omega^i_j(\frac{\partial}{\partial\bar{z}^k}, \frac{\partial}{\partial z^l})\frac{\partial}{\partial z^i})$$

$$
\begin{aligned}
&= g_{\bar{p}i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}(g^{i\bar{q}}\frac{\partial g_{j\bar{q}}}{\partial z^l}) \\
&= g_{\bar{p}i}g^{i\bar{q}}\frac{\partial^2 g_{j\bar{q}}}{\partial \bar{z}^k \partial z^l} - g_{\bar{p}i}g^{i\bar{s}}g^{r\bar{q}}\frac{\partial g_{r\bar{s}}}{\partial \bar{z}^k}\frac{\partial g_{j\bar{q}}}{\partial z^l} \\
&= \frac{\partial^2 g_{j\bar{p}}}{\partial z^l \partial \bar{z}^k} - g^{r\bar{q}}\frac{\partial g_{r\bar{p}}}{\partial \bar{z}^k}\frac{\partial g_{j\bar{q}}}{\partial z^l}
\end{aligned}
$$

于是 $R_{i\bar{j}k\bar{l}} = R_{\bar{j}i\bar{l}k} = R_{\bar{l}k\bar{j}i}$.

定义 7.4.1 (Kahler-Ricci 曲率)**.** 假定 $\partial/\partial z^i$ 给出了 $T'M$ 的正交基。那么对于实切向量场 X, Y，定义

$$
Kahler - Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} R(X, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}, Y, \frac{\partial}{\partial z^i})
$$

特别地：

$$
Kahler - Ric(X,X) = \frac{1}{2}Ric(X,X).
$$

(注意 $|\partial/\partial x| = |\partial/\partial y| = \sqrt{2}$

此时：

$$
\begin{aligned}
R_{i\bar{j}} &= -g^{k\bar{l}}R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -g^{k\bar{l}}R_{k\bar{l}i\bar{j}} \\
&= -g^{k\bar{l}}\frac{\partial^2 g_{k\bar{l}}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} + g^{k\bar{l}}g^{p\bar{q}}\frac{\partial g_{k\bar{q}}}{\partial z^i}\frac{\partial g_{p\bar{l}}}{\partial \bar{z}^j} \\
&= -\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\log\det g_{k\bar{l}}
\end{aligned}
$$

第八章　Calabi-Yau 猜想

8.1　表述和等价形式

首先回忆 Riemann 几何的概念：

定义 8.1.1 (Ricci 张量)**.** 给定 Riemann 流形 (M, g)，其 Levi-Civita 联络诱导了一个曲率 R：这个算符是 $\Gamma(M, \wedge^2 T^* E \otimes End(TE))$，因此在局部上诱导了

$$R_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$$

定义 $Ric_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ 为

$$Ric_p(Y, Z) := \mathrm{tr}(X \mapsto R_p(X, Y)Z)$$

这是一个双线性映射。明显这个定义和前述定义的 Ricci 曲率张量是一样的。

命题 8.1.2. *给定 Kahler 流形 M 以及其上的 Kahler 度量 $\sum g_{ij} dz^i \otimes d\bar{z}^j$，$Re ds^2$ 诱导了 Riemann 结构，那么这个 Riemann 结构对应的 Ricci 张量满足*

$$R_{ij} = -\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}[\log\det(g_{st})]$$

此时 $(1,1)$ 形式

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{ij} R_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}[\log\det(g_{st})]$$

后者由 Chern 示性类内容可知位于切丛的第一 Chern 类 c_1（$c_1(E) = \frac{1}{-2\pi\sqrt{-1}}\Omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det(g)$）

因此：

命题 8.1.3. *Kahler 流形（或者更严谨地说：容许 Kahler 度量的复流形）上 Kahler 结构诱导的 Ricci 形式一定是切丛第一 Chern 类的某个代表元。*

这个结果说明了 Kahler 流形是相当严格的，它诱导出的 Ricci 形式有着很严格的要求。然而 Calabi 猜想这件事情的逆命题成立：

定理 8.1.4 (Calabi-Yau 猜想)**.** *对于一个（容许 Kahler 结构的）流形 M，给定任何一个 $c_1(M)$ 的代表元 ψ，都存在一个 M 上的 Kahler 度量，使得这个度量诱导的 Ricci 形式恰好是 ψ。特别地，如果我们要求这个 Kahler 结构诱导的 Kahler 形式的上同调类和原有 Kahler 结构相同，那么这个 Kahler 结构唯一。*

我们现在将这个问题转换为一个流形上偏微分方程的求解。

对于两个不同 Kahler 结构诱导的 Ricci Form $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_{ij}dz^i\wedge d\bar{z}^j$, $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\tilde{R}_{ij}dz^i\wedge d\bar{z}^j$，那么它们都位于 c_1 的上同调类。由 $\partial\bar{\partial}$-引理，它们的差是 $\partial\bar{\partial}$ 恰当的，因此存在光滑函数 F 使得

$$\tilde{R}_{ij}-R_{ij}=-\frac{\partial^2 F}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}$$

假设上述两个 Kahler 结构（在标准基下）的度量矩阵分别为 $\tilde{g},g$，那么利用前述结果

$$\partial\bar{\partial}\log\frac{\det(\tilde{g}_{st})}{\det g_{st}}=\partial\bar{\partial}F$$

引理 8.1.5 ($\partial\bar{\partial}$ 极大值原理). *紧复流形 M 上的光滑函数 f 如果满足 $\partial\bar{\partial}f=0$，那么 f 一定是常数。*

证明. 取局部全纯坐标，那么 $\partial\bar{\partial}=0$ 意味着实部和虚部都是 $\mathbb{C}^n$ 上的调和函数。

现在由于流形是紧的，考虑 $\Re f$ 的极大值 K，选取局部坐标卡。由调和函数的平均值性质可知在一个开集内 $\Re f$ 都取到这个极大值 K，因此 $(\Re f)^{-1}(K)$ 是开的，反过来它天然是闭的，于是只能是全空间。

同样对虚部讨论，这就说明了 f 是常数。 □

应用这一引理，一定有常数 C 使得

$$\det\tilde{g}=C\exp(F)\det g$$

现在如果我们要求两个 Kahler 结构的 Kahler Class 相同，即 $\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum g_{ij}dz^i\wedge d\bar{z}^j$, $\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum\tilde{g}_{ij}dz^i\wedge d\bar{z}^j$ 的差是 $d-$ 恰当的，那么再一次由 $\partial\bar{\partial}$-引理，存在光滑函数 φ 使得

$$\tilde{g}_{ij}=g_{ij}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}$$

为了使新的 $\tilde{g}_{ij}$ 诱导了 Hermitian 度量，我们需要 $\tilde{g}_{ij}=\bar{\tilde{g}}_{ji}$，直接验证知这要求 φ 是实值的。

于是前述方程化为：

$$\det(g_{ij}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j})=C\exp(F)\det(g_{st})$$

我们注意到此时 C 的选择不是自由的：回忆 Wirtinger 定理，$\det(\tilde{g}_{st})dz^1\wedge d\bar{z}^1\cdots dz^n\wedge d\bar{z}^n$ 实际上是 $\frac{1}{n!}\omega^n$。

因此在前述方程两侧乘上 $dz^1\wedge d\bar{z}^1\cdots dz^n\wedge d\bar{z}^n$ 后在 M 上积分得到：

$$C\int_M\exp(F)dvol=\frac{1}{n!}\cdot\int_M(\omega+\partial\bar{\partial}\varphi)^n\overset{Stokes}{=\!=\!=}\frac{1}{n!}\int_M\omega^n=Vol(M)$$

在这里 g 被视为自带的初始 Kahler 结构，因此上式可以记成

$$C\int_M\exp(F)Vol(M)$$

接下来的目标是给定任一 F，在这一对 C 的约束下解前述方程。准确地说：我们下面来研究方程

$$\det(g_{ij}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j})(\det(g_{ij}))^{-1}=\exp\{F\} \tag{1.1}$$

（这里 F 已经通过加减某个常数满足前文的约束条件了）

我们需要找到实值函数 φ 使得 $(g_{ij}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j})$ 正定，这样就给出了一个满足要求的 Kahler 结构。

证明方法是将这个方程做如下形变

$$\det(g_{ij}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j})(\det(g_{ij}))^{-1}=Vol(M)[\int_M\exp(tF)]^{-1}]\exp(tF)\tag{1.2}$$

当 $t=0$ 时这个方程退化为平凡方程

$$\det(g_{ij}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j})=\det(g_{ij})$$

它当然有显然解 $\varphi=const.$，我们只需要证明使得上述方程有解的 $t\in[0,1]$ 构成的集合是开闭集，这样 $t=1$ 时我们就证明了解的存在性。

8.2 二阶导数的估计

现在开始始终假定 M 是紧 Kahler 流形，并且 $\dim_{\mathbb{C}}M=m$。

我们再一次从式 (1.1) 出发：

$$\det(g_{ij}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j})(\det(g_{ij}))^{-1}=\exp\{F\}\tag{2.1}$$

开始，现在我们对解 φ 做先验估计，首先归一化使得 $\int_M\varphi=0$ 并假定 $\varphi\in C^5(M)$。

对式 (2.1) 求导，有

$$\sum_{ij}g'^{ij}(\frac{\partial g_{ij}}{\partial z^k}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j\partial z^k})-\sum_{ij}g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial z^k}=\frac{\partial F}{\partial z^k}\tag{2.4}$$

这里 g' 指通过加入 $\partial^2\varphi/\partial z^i\partial\bar{z}^j$ 形变后的度规，上标 ^{ij} 指逆矩阵。

再一次求导有

$$\begin{aligned}-\sum_{ijtn}g'^{tj}g'^{in}(\frac{\partial g_{tn}}{\partial\bar{z}^l}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^t\partial\bar{z}^n\partial\bar{z}^l})(\frac{\partial g_{ij}}{\partial z^k}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j\partial z^k})\\+\sum_{ij}g'^{ij}(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial z^k\partial\bar{z}^l}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j\partial z^k\partial\bar{z}^l})+\sum_{ijkn}g^{tj}g^{in}\frac{\partial g_{tn}}{\partial\bar{z}^l}\cdot\frac{\partial g_{ij}}{\partial z^k}\\-\sum_{ij}g^{ij}\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial z^k\partial\bar{z}^l}=\frac{\partial^2 F}{\partial z^k\partial\bar{z}^l}\end{aligned}\tag{2.5}$$

现在取 Δ',Δ 分别为 g',g 诱导的标准 Laplacian（i.e. $\sum g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}$）

那么计算知

$$\Delta'\Delta\varphi=\Delta F+\sum_{ijknl}g'^{kj}g'^{in}\varphi_{k\bar{n}\bar{l}}\varphi_{i\bar{j}l}+\sum_{ijl}g'^{ij}R_{ij\bar{l}l}-\sum_{il}R_{iil\bar{l}}+\sum_{ijkl}g'^{kl}R_{ijkl}\varphi_{i\bar{j}}\tag{2.7}$$

其中 $\varphi_{i\bar{j}k}$ 表示 $\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j\partial z^k}$,etc. R_{ijkl} 是 Riemann 曲率张量。

由于左侧是坐标无关的，我们选取一组合适的全纯坐标，使得 $g_{ij}=\delta_{ij},\varphi_{ij}=\delta_{i\bar{j}}\varphi_{i\bar{i}}$，这个时候 $g'^{ij}=\delta_{ij}(1+\varphi_{i\bar{i}})^{-1}$

那么计算知

$$\Delta'\Delta\varphi \geq \Delta F+\sum g'^{kj}g'^{in}\varphi_{k\bar{n}\bar{l}}\varphi_{i\bar{j}l}+(\inf_{i\neq l}R_{iill})[\sum_{il}\frac{1+\varphi_{i\bar{i}}}{1+\varphi_{l\bar{l}}}-m^2]$$

现在考虑辅助函数 $\exp(-C\varphi)\cdot(m+\Delta\varphi)$

$$\begin{aligned}&\Delta'(\exp(-C\varphi)(m+\Delta\varphi))\\ \geq{}&\exp(-C\varphi)(\Delta F-m^2\inf_{i\neq l}R_{iill})-C\exp(-C\varphi)m(m+\Delta\varphi)\\ &+(C+\inf_{i\neq l}R_{iill})\exp(-C\varphi)(m+\Delta\varphi)(\sum_i\frac{1}{1+\varphi_{i\bar{i}}})\end{aligned}\tag{2.18}$$

结合初等的不等式 $\sum\frac{1}{1+c_i}\geq(\frac{\sum(1+c_i)}{\prod(1+c_i)})^{1/m-1}$ 知

$$\sum\frac{1}{1+\varphi_{i\bar{i}}}\geq(m+\Delta\varphi)^{1/(m-1)}\exp(-\frac{F}{m-1})\tag{2.20}$$

（这是因为我们选取了一个比较恰当的坐标）

在合适的常数 C 下（使得 $C+\inf_{i\neq l}(R_{iill})>1,C>0$）我们计算得知

$$\begin{aligned}\Delta'(\exp(-C\varphi)\cdot(m+\Delta\varphi))\geq{}&\exp(-C\varphi)(\Delta F-m^2\inf(R_{iill}))-C\exp(-C\varphi)m(m+\Delta\varphi)\\ &+(C+\inf_{i\neq l}R_{iill})\exp(\frac{-F}{m-1})(m+\Delta\varphi)^{1+1/(m-1)}\end{aligned}\tag{2.22}$$

假设在 p 点辅助函数 $\exp(-C\varphi)\cdot(m+\Delta\varphi)$ 取到极大值，那么在这一点式 (2.22) 左侧就是 0，即：

$$0\geq\Delta F-m^2\inf_{i\neq l}R_{iill}-Cm(m+\Delta\varphi)+(C+\inf_{i\neq l}R_{iill})\exp(\frac{-F}{m-1})(m+\Delta\varphi)^{m/(m-1)}\tag{2.23}$$

于是 $(m+\Delta\varphi)(p)^{1+1/(m-1)}\leq a\cdot(m+\Delta\varphi)(p)+b$：

这给出了 $(m+\Delta\varphi)(p)$ 关于 $\sup_M(-\Delta F)$,$\sup_M|\inf_{i\neq l}R_{iill}|$,$C\cdot m$,$\sup_M F$ 的估计。

我们设这个上界为 C_1，它仅和上文提及的几个量有关。由于 $\exp(-C\varphi)(m+\Delta\varphi)$ 在 p 处取到最大值，那么自然有

$$m+\Delta\varphi\leq C_1\exp(C(\varphi-\inf_M\varphi))$$

另一方面 $\Delta\varphi+m=\sum(1+\varphi_{i\bar{i}})=\sum g'^{ii}g_{ii}>0$，这就说明了

$$0<m+\Delta\varphi\leq C_1\exp(C(\varphi-\inf_M\varphi))\tag{2.24}$$

8.2.1 $\sup_M \varphi$ 的估计

我们利用紧 Riemann 流形上 Laplacian 的 Green 函数理论进行估计。

定义 8.2.1. Green 函数 $G(p,q)$ 满足如下性质：

$$\varphi(p) = -\int_M G(p,q)\Delta\varphi(q)dq$$

现在由于 M 紧，存在一个仅和 M 有关的常数使得 $G(p,q)+K \geq 0$，那么

$$\varphi(p) = -\int_M G(p,q)\Delta\varphi(q)dq = -\int_M (G(p,q)+K)\Delta\varphi(q)dq$$

（最后一个等号是因为在闭 Riemann 流形上 $\int_M \Delta\varphi = 0$）

于是由 $m+\Delta\varphi > 0$：

$$\sup_M \varphi \leq m \sup_{p\in M} \int_M (G(p,q)+K)dq \tag{2.27}$$

（注意式子右侧天然大于 0，这使得下一式的放缩正确）

于是这就说明了

$$\begin{aligned} &\int_M |\varphi| \leq \int_M |\sup\varphi - \varphi| + \int_M |\sup\varphi| \\ \leq (|\sup_M \varphi| + \sup_M \varphi)vol(M) - &\int_M \varphi \leq 2m \cdot vol(M) \sup_{p\in M}\int_M (G(p,q)+K)dq \end{aligned} \tag{2.28}$$

8.2.2 $\inf_M \varphi$ 的估计

首先我们重新回到式 (2.18)，为不引起混淆，将其中的 C 改记为 N，即：

$$\begin{aligned} &\Delta'(\exp(-N\varphi)(m+\Delta\varphi)) \\ \geq \exp(-N\varphi)(\Delta F - m^2 \inf_{i\neq l} R_{iill}) - &N\exp(-N\varphi)m(m+\Delta\varphi) \\ +(N + \inf_{i\neq l} R_{iill})\exp(-N\varphi)(m+\Delta\varphi)&(\sum_i \frac{1}{1+\varphi_{i\bar{i}}}) \end{aligned} \tag{2.47}$$

选取 N 使得 $N + \inf(R_{\bar{i}il\bar{l}}) \geq \frac{1}{2}N$。那么由式 (2.20)

$$(N + \inf_{i\neq l} R_{\bar{i}il\bar{l}})(m+\Delta\varphi)(\sum \frac{1}{1+\varphi_{i\bar{i}}}) \geq \frac{1}{2}N\exp(\frac{-F}{m-1})(m+\Delta\varphi)^{m/(m-1)} \tag{2.49}$$

存在 C_9 仅和 $\sup F, m$ 相关使得

$$\frac{1}{2}N\exp(\frac{-F}{m-1})(m+\Delta\varphi)^{m/(m-1)} \geq 2Nm(m+\Delta\varphi) - NC_9 \tag{2.50}$$

将式 (2.49), 式 (2.50), N 的选取代入式 (2.47)，经计算就有

$$\begin{aligned} &\exp(F)\Delta'(\exp(-N\varphi)(m+\Delta\varphi)) \\ \geq -C_{10}\exp(-N\varphi) + m\exp(\inf F)(-\Delta\exp(-N\varphi) + &N^2\exp(-N\varphi)|\nabla\varphi|^2) \end{aligned} \tag{2.52}$$

其中 C_{10} 仅和 N, F, M 有关。

对式 (2.52) 积分，就得到

$$\int_M |\nabla \exp(-\frac{1}{2}N\varphi)|^2 = \frac{1}{4}N^2\int_M \exp(-N\varphi)|\nabla\varphi|^2$$
$$\leq_{2.52,\exp(F-\inf F)\geq 1} \frac{1}{4}C_{10}m^{-1}\exp(-\inf F)\int_M \exp(-N\varphi) \tag{2.53}$$

我们来证明对于所有满足式 (2.28) 和式 (2.53) 的 φ,一定有一个 N,F,M 给出的对 $\int_M \exp(-N\varphi)$ 的估计。

假设这不成立，那么存在 $\{\varphi_i\}$ 使得 $\lim_i \int_M \exp(-N\varphi_i) = +\infty$。

定义 $\exp(-N\tilde{\varphi}_i) = \exp(-N\varphi_i)(\int\exp(-N\varphi_i))^{-1}$。那么式 (2.53) 保证 $\int_M |\nabla\exp(-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi})|^2$ 是一致有界的，而 $||\exp(-N\tilde{\varphi}_i||_2 = 1$，那么由紧性存在一个子列 $\{\exp(-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i)\}$ 在 L^2 意义下收敛。我们无妨假设这个收敛子列就是 φ_i 自身。

现在

$$vol\{x|\lambda\leq\exp(-\frac{1}{2}N\varphi_i)\} = vol\{x|\frac{2}{N}\log\lambda+\frac{1}{N}\log\int_M\exp(-N\varphi_i)\leq-\varphi_i\}$$
$$\leq vol\{x|\frac{2}{N}\log\lambda+\frac{1}{N}\log\int_M\exp(-N\varphi_i)\leq-\varphi_i\}$$
$$\leq vol\{x|0<\frac{2}{N}\log\lambda+\frac{1}{N}\log\int_M\exp(-N\varphi_i)\leq-\varphi_i\}\quad(since\int_M\exp(-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i)\to+\infty)$$
$$\leq(\frac{2}{N}\log\lambda+\frac{1}{N}\log\int_M\exp(-N\varphi_i))^{-1}\int_M|\varphi_i| \tag{2.57}$$

由式 (2.28) $\int_M|\varphi_i|$ 一致有界，那么这就说明了

$$\lim_i vol\{x|\lambda\leq\exp(-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i)\} = 0 \tag{2.58}$$

另一方面

$$vol\{x|\lambda\leq f\}\leq vol\{x|\}$$
$$\leq vol\{x|\frac{1}{2}\lambda\leq|f-\exp(-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i)|\}+vol\{x|\frac{1}{2}\lambda\leq\exp(-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i)\}$$
$$\leq\frac{4}{\lambda^2}\int_M|f-\exp(-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i)|^2+vol\{x|\frac{1}{2}\lambda\leq\exp(-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i)\}$$

由于 $\exp(-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi})$ L^2 收敛到 f，那么前两式共同说明了 $vol\{x|\lambda\leq f\}=0,\forall\lambda>0$。由于 f 是一列处处取正值函数的 L^2 极限，但是前文说明 f 几乎处处小于零。那么 $\int_M|f-\exp(-\frac{1}{2}N\tilde{\varphi}_i)|^2\geq\int_M\exp(-N\tilde{\varphi}_i)=1$，矛盾！

因此这说明了 $\int_M\exp(-N\varphi)$ 有只和 N,F,M 有关的估计。

现在开始估计 $|\inf_M\varphi|$，首先回到式 (2.24)，将它重写为 $\Delta\varphi = f$，其中 $-m\leq f\leq C_1\exp(C\sup\varphi)\exp(-\inf_M\varphi)$，那么由于

定理 8.2.2 (椭圆二阶偏微分方程的 Schauder 估计)**.** *$C^{m,n}$ 指 m 阶连续可导并且 n 阶 Holder 连续的函数，那么对于 $f\in C^\alpha$，如果 $u\in C^{2,\alpha}$ 满足如下严格椭圆方程*

$$\sum_{i,j}a_{i,j}(x)D_iD_ju(x)+\sum_i b_i(x)D_iu(x)+c(x)u(x)=f(x)$$

（这里的严格椭圆是指最小特征值是正实数 λ）

并且所有系数项的有一致上界

$$|a_{i,j}|_{0,\alpha;\Omega}, |b_i|^{(1)}_{0,\alpha;\Omega}, |c|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega} \leq \Lambda.$$

其中 $|u|^{(m)}_{k,\alpha;\Omega} = |u|^{(m)}_{k;\Omega} + [u]^{(m)}_{k,\alpha;\Omega} = \sum_{|\beta|\leq k} \sup_{x\in\Omega} |d_x^{|\beta|+m} D^\beta u(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ |\beta|=k}} d_{x,y}^{m+k+\alpha} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha}$.

那么解函数有控制

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega} \leq C(n,\alpha,\lambda,\Lambda)(|u|_{0,\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}).$$

其中 $|u|^*_{k,\alpha;\Omega} = |u|^*_{k;\Omega} + [u]^*_{k,\alpha;\Omega} = \sum_{|\beta|\leq k} \sup_{x\in\Omega} |d_x^{|\beta|} D^\beta u(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ |\beta|=k}} d_{x,y}^{k+\alpha} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha}$

现在对 $\Delta\varphi = f$ 应用 Schauder 估计，就有

$$\sup_M |\nabla\varphi| \leq C_6(\exp(-C\inf\varphi) + \int_M |\varphi|)$$

其中 C_6 仅和 M 与 $C_1\exp(C\sup\varphi)$ 有关。

现在由于式 (2.27), 式 (2.28) 给出了 $\sup\varphi, \int_M |\varphi|$ 的估计，于是就有

$$\sup_M |\nabla\varphi| \leq C_7(\exp(-C\inf\varphi) + 1) \tag{2.46}$$

其中 C_7 仅和 M, C 有关。

假设 φ 在 p 取到最小值，以这个点为球心取一个半径为 $-\frac{1}{2}\inf\varphi C_7^{-1}(\exp(-C\inf\varphi)+1)$ 的测地球并且使得这个测地球不超单射半径，那么由于对散度的估计这使得 φ 在这个测地球上不超过 $-\frac{1}{2}\inf\varphi$。选取充分大的 N 使得前述对 N 的条件满足，并且 $N \geq 4mC$，那么 $\exp(-N\varphi)$ 在测地球上的积分不小于

$$C_{12}\exp(-\frac{1}{2}N\inf\varphi)(-\frac{1}{2}\inf\varphi)^{2m}C_7^{-1}(\exp(-C\inf\varphi)+1)^{-2m}$$

其中 C_{12} 仅和 M 有关，我们又有 $\int_M \exp(-N\varphi)$ 的估计，这就给出了 $-\inf\varphi$ 的估计。

另一方面我们已有 $\sup\varphi$ 的估计，这就给出了 $\sup_M|\varphi|$ 的估计，式 (2.46) 和式 (2.24) 给出了 $\sup_M|\Delta\varphi|, \sup_M(m+\delta\varphi)$ 的估计。另一方面 $\delta_{ij}+\varphi_{ij}$ 是正定 Hermitian 矩阵，于是存在 $1+\varphi_{ii}$ 的上界，但是 $\prod(1+\varphi_{ii}) = \exp(F)$，这就给出了每个 $1+\varphi_{ii}$ 的下界估计。

因此

定理 8.2.3 (Yau's second order estimation). *M 是紧 Kahler 流形，φ 是 $C^4(M)$ 使得 $\int_M\varphi = 0$，$\sum(g_{ij} + \partial^2\varphi/\partial z^i\partial\bar{z}^j)dz^i\otimes d\bar{z}^j$ 给出了一个 Hermitian 度量。并且*

$$\det(g_{ij} + \partial^2\varphi/\partial z^i\partial\bar{z}^j)\det(g_{ij})^{-1} = \exp(F)$$

那么存在 C_1, C_2, C_3, C_4 和 $\inf_M F, \sup_M F, \inf\Delta F, M$ 使得

$$\sup|\varphi| \leq C_1, \sup|\nabla\varphi| \leq C_2, 0 < C_3 \leq 1+\varphi_{i\bar{i}} \leq C_4$$

8.3 三阶导数的估计

为了估计三阶导数，我们使用的辅助函数是

$$S=\sum g'^{ir}g'^{js}g'^{kt}\varphi_{i\bar{j}k}\varphi_{\bar{r}s\bar{t}}$$

我们称 $A\simeq B$ 如果 $|A-B|\leq C_1\sqrt{S}+C_2$，其中 C_1,C_2 是无关常数，那么仍然选取前文的较为方便的坐标，经过计算：

$$\begin{aligned}\Delta' S\simeq\sum(1+\varphi_{i\bar{i}})^{-1}(1+\varphi_{j\bar{j}})^{-1}(1+\varphi_{k\bar{k}})^{-1}(1+\varphi_{\alpha\bar{\alpha}})^{-1}\\ \times\{|\varphi_{\bar{i}j\bar{k}\alpha}-\sum_p\varphi_{\bar{i}pk}\varphi_{\bar{p}j\alpha}(1+\varphi_{p\bar{p}})^{-1}|^2\\ +|\varphi_{i\bar{j}k\alpha}-\sum_p(\varphi_{i\bar{j}k\alpha}\varphi_{p\bar{j}k}+\varphi_{\bar{p}ik}\varphi_{p\bar{j}\alpha})(1+\varphi_{p\bar{p}})^{-1}|\}\end{aligned}\tag{3.2}$$

另一反面式 (2.7) 说明了 $\Delta'(\Delta\varphi)\geq\sum(1+\varphi_{k\bar{k}})^{-1}(1+\varphi_{i\bar{i}})^{-1}|\varphi_{k\bar{i}\bar{j}}|^2-C_6$。

于是结合两者就有 $\Delta'(S+C_7\Delta\varphi\geq C_8S-C_9$，现在考虑 $S+C_7\Delta\varphi$ 的极大值点，那么在这一点上就有 $C_8S-C_9\leq 0$，于是 $C_8(S+C_7\Delta\varphi)\leq C_9+C_8C_7\Delta\varphi$。因此这就给出了 $\sup(S+C_7\Delta\varphi)$ 的估计，然而我们已经估计过 $\Delta\varphi$，这就给出了 $\sup_M S$ 的估计，从而给出了诸三阶导数 $\varphi_{i\bar{j}k}$ 的估计。

定理 8.3.1 (Yau's third order estimation). *M 是紧 Kahler 流形，φ 是 $C^5(M)$ 使得 $\int_M\varphi=0$，$\sum(g_{ij}+\partial^2\varphi/\partial z^i\partial\bar{z}^j)dz^i\otimes d\bar{z}^j$ 给出了一个 Hermitian 度量。并且*

$$\det(g_{ij}+\partial^2\varphi/\partial z^i\partial\bar{z}^j)\det(g_{ij})^{-1}=\exp(F)$$

那么存在依赖于 $g_{ij},\sup|F|,\sup|\nabla F|,\sup_M\sup_i|F_{i\bar{i}},\sup_M\sup_{i,j,k}|F_{i\bar{j}k}|$ 的对 $\varphi_{i\bar{j}k}$ 的估计。

8.4 原方程的求解

我们考虑形变方程：

$$\begin{aligned}S=\{t\in[0,1]|\det(g_{ij}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j})(\det(g_{ij}))^{-1}\\ =Vol(M)[\int_M\exp(tF)]^{-1}]\exp(tF)\ \textit{has a solution in}\ C^{k+1,\alpha}\}\end{aligned}$$

再一次 $C^{k+1,\alpha}$ 是指 $k+1$ 阶连续可导并且 α 阶 Holder 连续。明显 $0\in S$，只需证明 S 是开闭的。

S 是开的，因为考虑 $\theta=\{\varphi\in C^{k+1,\alpha}(M)|1+\varphi_{i\bar{i}}>0,\int_M\varphi\}=0$

S 的开性

现在取 $\theta=\{\varphi\in C^{k+1,\alpha}|1+\varphi_{i\bar{i}}>0,\int_M\varphi\},B=\{f\in C^{k-1,\alpha}|\int_M f=vol(M)\}$，那么有

$$G:\theta\mapsto B$$

$$G(\varphi)=\det(g_{ij}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j})\det(g_{ij})^{-1}$$

我们只需证明 G 局部诱导了同胚，这实际上是某种 Banach 流形上的反函数定理：因此我们考虑 G 在 φ_0 处的微分。

取 $\varphi_t = \varphi_0 + t\eta$，那么

$$\frac{d}{dt}G(\varphi_t)|_t = \frac{d}{dt}\det(g_{ij} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j})(\det g_{ij})^{-1} = \Delta_{\varphi_0}\eta$$

即：非奇异性实际上依赖于 Poisson 方程 $\Delta_{\varphi_0}\eta = f$ 的解，这里 Δ_{φ_0} 是对 Kahler 度量施加 φ_0 的变形诱导的度量的 Laplacian。

首先注意到 B 的切空间是 $C^{k-1,\alpha}$ 函数 f 使得 $\int_M f = 0$，这恰好是 $\Delta_{\varphi_0}\eta = f$ 存在（L^2 中的）弱解的条件，然而 Schauder 理论保证了当 $f \in C^{k-1,\alpha}$ 时，弱解 $\eta \in C^{k+1,\alpha}$，同时这个解明显是唯一的（在要求 $\int_M \varphi = 0$ 后）：因为两个解的差的 Laplacian 是零，那么这个差（由极大值原理）只能是常数。

现在这就证明了 φ_0 的邻域和 $G(\varphi_0)$ 的邻域之间存在某个同胚，这就证明了 S 的开性。

S 的闭性

假设有一个序列 $\{t_q\} \subseteq S$，存在一列 $\varphi_q \in C^{k+1,\alpha}$，满足对应的形变方程，同时我们假定 $\int_M \varphi_q = 0$。然后如同在前两节中所做的那样，我们对这个形变方程求导：

$$\begin{aligned}&\det(g_{ij} + \frac{\partial^2\varphi_q}{\partial z^i\partial\bar{z}^j})\sum_{ij} g'^{ij}\frac{\partial^2}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}(\frac{\partial\varphi_q}{\partial z^p})\\ =\ & vol(M)(\int_M \exp(t_qF))^{-1}\frac{\partial}{\partial z^p}[\exp(t_qF)\det(g_{ij})]\end{aligned}$$

其中 g'_{ij} 仍然是形变度规的逆矩阵。

定理 8.2.3保证上述方程左侧是一致地强椭圆的（对 g'^{ij} 的控制）；定理 8.3.1保证上述方程的系数是 α-Holder 连续的，$\forall\alpha \in [0,1]$，并且给出了 Schauder estimation 所需的控制。

注记. 由于我们在紧流形上工作，Holder 连续和局部 Holder 连续是等同的。

因此应用 Schuader 估计：**??**，我们给出了 $\partial\varphi_q/\partial z^p$ 的 $C^{2,\alpha}$ 范数估计。同样地对 $\partial\varphi_q/\partial\bar{z}^p$ 也是如此。但是上述估计反过来继续限制了形变方程左侧系数的可微性，因此不断使用 Schuader 估计，我们给出了 φ_q 的 $C^{k+1,\alpha}$ 范数估计。

于是函数序列 φ_q 是一致有界的并且其各阶导数也是一致有界的。由 Arzela-Ascoli 定理，这就说明了 φ_q 有 $C^{k+1,\alpha}-$ 范数下收敛的子列，于是这就给出了 $\lim t_q$ 时形变方程的解。

最后注意到在初始的 $t=0$ 的情况我们总要求形变度规的正定性，定理 8.2.3的估计保证了正定性，这就完成了证明。

定理 8.4.1 (Calabi-Yau 猜想的 PDE 形式). *M 是紧 Kahler 流形，赋予 Kahler 度量 $\{g_{ij}\}$，$F \in C^k(M), k \geq 3$，$\int_M \exp(F) = vol(M)$。那么存在 $\varphi \in C^{k+1,\alpha}(M), \forall 0 \leq \alpha < 1$，使得 $g_{ij} + \partial^2\varphi/\partial z^i\partial\bar{z}^j$ 给出了 Kahler 度量，并且它满足*

$$\det(g_{ij} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}) = \exp(F)\det(g_{ij})$$

最后证明 Calabi 猜想中的唯一性部分：

命题 8.4.2. *φ,ψ 使得 Kahler 度规 ω 在 φ,ψ 的形变下仍然是 Kahler 度规，并且 Kahler class 相同，如果它们诱导的 Ricci Form 相同，那么它们只能相差一个常数。*

证明. 假定形变后的度规分别为 ω_1,ω_2,（注意 $dd^c=\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\partial$），那么 ω_1,ω_2 正是（作为 Kahler 形式）添加 $dd^c\varphi, dd^c\psi$。如果 Ricci Form 相同，那么回忆前文对 Ricci Form 的计算，那么 $\det g'_{st}/\det g_{st}$ 在 $\partial\bar{\partial}$ 作用下是零，再一次由 $\partial\bar{\partial}$ 极大值原理，我们知道这一定是常数。

然而 $\int\omega_1^n=\int\omega_2^n=vol(M)\cdot n!$，于是只能有 $\omega_1^n=\omega_2^n$。

现在 $0=(\omega+dd^c\varphi)^n-(\omega+dd^c\psi)^n=dd^c(\varphi-\psi)\wedge T$，其中 T 是正定，闭的 $(n-1,n-1)$ 形式。

$$0=\int(\psi-\varphi)((\omega+dd^c\varphi)^n-(\omega+dd^c\psi)^n)=\int_M(\psi-\varphi)\wedge dd^c(\varphi-\psi)\wedge T$$

那么分部积分得

$$=\int_M d(\varphi-\psi)\wedge d^c(\varphi-\psi)\wedge T$$

于是这就说明了 $d(\varphi-\psi)\wedge d^c(\varphi-\psi)=0$，展开计算知这要求 $\varphi-\psi$ 相差只能是常数。 □

这就完成了唯一性的证明，于是作为推论，我们就证明了原本的 Calabi 猜想。

第二部分

复代数簇

第九章　除子和线丛

9.1　除子

9.1.1　Weil 除子

在接下来的除子内容中，我们会使用簇的性质来完成定义。这和概形语言中的除子 (Weil/-Cartier) 有一定的区别，尽管它们的大致内容是相同的。

定义 9.1.1 (Weil 除子)**.** 一个复流形 M 上的 Weil 除子 D 是一组形式和 $D=\sum a_iV_i$。

其中 V_i 是不可约主解析集，并且满足局部有限性，i.e.$\forall p\in M$，存在 p 的开邻域仅和有限个 V_i 相交。

所有非零系数的主解析集构成的集合族称为除子 D 的支撑 $\operatorname{supp} D$。

注意如果 M 是紧的，这说明 V_i 个数有限：考虑有限开覆盖。

全体 Weil 除子构成了一个 Abel 群，记为 $WDiv(M)$。

定义 9.1.2 (有效除子)**.** 称 Weil 除子 D 是有效的，如果 $a_i\geq 0,\forall i$，记为 $D\geq 0$。

定义 9.1.3 (除子的阶)**.**

$$\deg D=\sum a_i$$

任何一个主解析集 V（由第 1.4 节）表示成不可约主解析集的并 $V_1\cup\cdots\cup V_m$，将 V 视作 Weil 除子 $\sum V_i$。

9.1.2　Cartier 除子

下面我们用另一种方式给出除子的定义：

定义 9.1.4 (Cartier 除子)**.** 一个复流形上的 Cartier 除子是指商层 $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ 的一个整体截面。

下面我们来说明这两种除子的等价性。对于一个不可约主解析集 $V\subseteq M$，$p\in V$ 为其上一点，设 f 是在 p 点局部决定 V 的全纯函数。对于任何一个 p 点邻域处定义的全纯函数 g，定义阶数 $ord_{V,p}(g)$ 为局部环 $\mathscr{O}_{M,p}$ 中最大的使得 $f^a|g$ 的整数 a。

然而**命题 1.3.10说明了 $ord_{V,p}(g)$ 和 p 无关**。因为 g 和 $f^\alpha+1$ 是互素的，于是可以使用前文结论，具体来说过程如下：

定义映射 $ord:V\to\mathbb{Z}^{\geq 0}:p\mapsto ord_{V,p}(g)$。如果存在多于一个像，那么由定义每个像的原像都一定是开集。（选取保持阶数不变的邻域即可）因此 ord 是连续映射（$\mathbb{Z}^{\geq 0}$ 赋离散拓扑）

于是各个原像一定是开闭集，从而和 V 的不可约性矛盾。

自然地，$ord_V(gh) = ord_V(g) + ord_V(h)$。对于一个亚纯函数，局部形式地写为 $f = g/h$ 时（g, h 全纯且互素），定义 $ord_V(f) = ord_V(g) - ord_V(h)$。容易验证这是良定义的：不同开集的交上 f 的不同表示方式并没有改变 $ord_V(g) - ord_V(h)$。

称亚纯函数在 V 上有 a 阶零点如果 $ord_V(f) = a > 0$；称其在 V 上有 a 阶极点如果 $ord_V(f) = -a < 0$。对于一个亚纯函数 f，定义 Weil 除子

$$(f) = \sum_V ord_V(f) \cdot V$$

当然也有零点除子 $(f)_0 = \sum_V ord_V(g) \cdot V$；极点除子 $(f)_\infty = \sum_V ord_V(h) \cdot V$。于是自然 $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$。

注记. 需要验证这里使得 $ord_V \neq 0$ 的 V 是局部有限的，然而这由 Weierstrass 预备定理是容易验证的。

下面来建立两种除子之间的联系。首先需要指出 $\Gamma(\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*)$ 的元素：利用正向极限的层化定义，可知：$\Gamma(\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*)$ 的一个元素 $\{f\}$ 一定是如下元素所在的等价类中：

给定某组开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和其上的亚纯函数 $f_\alpha \not\equiv 0$（准确地说，这些 f_α 是一个等价类 $f_\alpha \cdot \mathscr{O}^*$），并且满足 f_α, f_β 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上是在同一个 $/\mathscr{O}^*$ 的等价类，i.e. $f_\alpha/f_\beta \in \mathscr{O}^*(U_\alpha, U_\beta)$

因此自然 $ord_V(f_\alpha) = ord_V(f_\beta)$，于是我们将 $\{f\}$ 和除子 $D = \sum_V ord_V(f_\alpha) \cdot V$。

其中这个求和式的意义为：对每个 V，$V \cap U_\alpha \neq \varnothing$。

反过来，对一个除子 $D = \sum a_i V_i$，选取一组开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 使得对于每个 U_α，每个 V_i 在其中存在（零点集的）定义函数 $g_{i\alpha} \in \mathscr{O}(U_\alpha)$。

取 $f_\alpha = \prod g_{i\alpha}^{a_i} \in \mathscr{M}^*(U_\alpha)$，容易验证这些 f_α 可以粘起来称为 $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$，因此我们建立了如下的结果：

$$H^0(M, \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*) \cong WDiv(M)$$

接下来我们将这两种除子统一，全体除子构成的群定义为 $Div(M)$

定义 9.1.5 (除子的拉回). 对于复流形间的全纯映射 $\pi : M \to N$，有除子群上的拉回映射 $\pi^* : Div(N) \to Div(M)$：这只需考虑层 $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ 的拉回。准确地说，π^* 将 $(\{U_\alpha\}, \{f_\alpha\})$ 拉回为 $(\{\pi^{-1}U_\alpha\}, \{f_\alpha\})$。

注意此时不能直接使用主解析集的拉回，因为系数也许会改变（重数）。

最后，在 Riemann 面上除子是很简单的，因为每个点都是一个不可约主解析集。但是在高维复流形上除子的数量可能会很少，甚至没有。然而如果复流形能够嵌入到复射影空间中，那么复射影空间中的超平面能够在这个流形上交出许多主解析集。事实上除子的数量充分多这件事和复流形的嵌入有着重要的关系。

9.2 线丛

接下来讨论的是复流形上的全纯线丛 $\pi : L \to M$。正如前文提及的那样：线丛 L 和转移函数 $g_{\alpha\beta}$，满足：

$$\begin{cases} g_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha} = 1 \\ g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1 \end{cases}$$

$g_{\alpha\beta} \in \mathscr{O}^*(U_\alpha\beta)$。

很明显这个定义与 Cech 上同调是相符的，而流形上（仿紧）Cech 上同调和层上同调是相同的（$\delta(\{g_{\alpha\beta}\}) = 0$，线丛相同当且仅当 $g_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1\prime}$ 是 Cech 上边缘），于是线丛实际上和 $H^1(M, \mathscr{O}^*)$ 相同。

下面，对于 M 上的全体线丛给出一个群结构：乘法定义为张量积，逆定义为对偶丛。反映到转移函数上由预备内容部分已经讨论过的内容知：

$$L \otimes L' \sim \{g_{\alpha\beta}g'_{\alpha\beta}\}; L^* \sim \{g_{\alpha\beta}^{-1}\}$$

这个群中的单位元是平凡丛。很容易发现这个群结构和 $H^1(M, \mathscr{O}^*)$ 是一样的。

定义 9.2.1 (Picard 群). 称

$$H^1(M, \mathscr{O}^*)$$

为流形 M 的 Picard 群，记为 $Pic(M)$，它同时反映了全体全纯线丛构成的群结构。

9.2.1 除子-线丛对应

除子引入的重要原因就是它与全纯线丛之间存在对应关系，这是一个复几何中非常基本而且重要的事实。

对于一个除子 D，我们使用其 Cartier 除子定义：假定其在某个开覆盖上 $\{U_\alpha\}$ 分别由 $f_\alpha \in \mathscr{M}^*(U_\alpha)$ 定义，那么取

$$g_{\alpha\beta} = f_\alpha / f_\beta$$

它是非零的全纯函数，并且满足转移函数的条件。因而这给出了一个线丛：称为除子 D 的关联线丛，记为 $[D]$。

这里我们需要说明 f_α 的选取不会影响结果：如果 $h_\alpha = f_\alpha / f'_\alpha \in \mathscr{O}^*(U_\alpha)$，那么对 g 带来的影响也不过是 $h_\beta / h_\alpha \in \mathscr{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$，因此得到的仍然是同一个线丛。（这实际上说的是一般全纯线丛不能成为平凡丛的障碍恰好源于局部上的亚纯函数所处的 $\mathscr{O}^*$ 等价类可以粘出不是亚纯函数的东西）

容易验证 $[D + D'] = [D] \otimes [D']$，因此我们有了群同态：

$$[\,] : Div(M) \to Pic(M)$$

现在考虑 $D = (f)$ 是亚纯函数定义的除子，那么对于开覆盖 $\{U_\alpha\}, f_\alpha = f|_{U_\alpha}$，从而 $g_{\alpha\beta} = 1$，亦即 $[D]$ 是平凡丛。反过来对于一个使得 $[D]$ 成为平凡丛的除子，如果 D 局部上由亚纯函数 f_α 给出，由平凡化：f_α / f_β 可以表示成处处非零全纯函数 h_α / h_β 的比。

因此 $f = f_\alpha \cdot h_\alpha^{-1}$ 是一个全局的亚纯函数，使得其除子为 D。

于是总结一下得到结论：

命题 9.2.2 (除子-线丛对应). ker[ ] 恰为所有亚纯函数对应的除子 (f)。称 $D \sim D'$ 线性等价，如果它们之间恰好差了一个亚纯函数的对应除子，因此除子的线性等价类对应着全纯线丛的（同构）类。

更进一步地，这个对应关系是自然的，即对于复流形之间的全纯映射 $f : M \to N$，有：

$$f^*([D]) = [f^*(D)]$$

另一方面，这个结论有一个层论的直接说明：对于层的长正合列

$$0 \to \mathscr{O}^* \xrightarrow{i} \mathscr{M}^* \xrightarrow{j} \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^* \to 0$$

那么长正合列定理指出

$$H^0(M, \mathscr{M}^*) \xrightarrow{j_*} H^0(M, \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^1(M, \mathscr{O}^*)$$

然而 $H^0(M, \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*) = Div(M); H^1(M, \mathscr{O}^*) = Pic(M)$；并且可以验证：

$$j_*f = (f); \delta D = [D]$$

因此前文所有的结果都可以由这个正合列立刻指出。

9.2.2 线丛的全纯和亚纯截面

由线丛的定义，L 的一个 U 上全纯截面由如下给出：

$$\{s_\alpha \in \mathscr{O}(U \cap U_\alpha)\}$$

其中 $s_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot s_\beta$，$\{U_\alpha\}$ 是一组开覆盖，$g_{\alpha\beta}$ 是对应的转移函数。

这里 $\mathbb{C}$ 值全纯函数到线丛的转化是通过平凡化 $L_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$ 转换得到的。（这其实就像定义丛的光滑截面：通过拉回变为普通的 $\mathbb{R}(\mathbb{C})-$ 值函数然后讨论光滑性：正如一般的向量丛的转移函数光滑性保证了良定义性，这里全纯向量丛的转移函数全纯性也保证了良定义性）

类似地，定义 L 在 U 上的亚纯截面为 $\mathscr{O}(L) \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{M}$ 的一个截面（全纯截面层的"亚纯化"）：其中 $\mathscr{O}(L)$ 是 L 的全纯截面构成的层。于是它同样是由如下给出：

$$\{s_\alpha \in \mathscr{M}(U \cap U_\alpha)\}$$

其中 $s_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot s_\beta$，$\{U_\alpha\}$ 是一组开覆盖，$g_{\alpha\beta}$ 是对应的转移函数。

对于 L 的全局亚纯截面 s，$s_\alpha/s_\beta \in \mathscr{O}^*$，因此可以定义 $ord_V(s) = ord_V(s_\alpha)$，其中 $U_\alpha \cap V \neq \varnothing$。这样一个截面也有对应的除子：

$$(s) = \sum ord_V(s) \cdot V$$

那么 s 是全纯截面 $\iff$ (s) 是有效除子。

对于一个除子 $D \in Div(M)$，设其由 $f_\alpha \in \mathscr{M}(U_\alpha)$ 决定（Cartier），那么这些 f_α 当然满足上文亚纯截面的定义，因此有了 $[D]$ 的一个亚纯截面 s_f，$(s_f) = D$。反过来，对于 L 上任何一个非恒零亚纯截面 s，都有 $[(s)] = L$。

定理 9.2.3. 对任何除子 D 使得 $[D]=L$，存在一个 L 的亚纯截面 $(s)=D$；对于任何 L 的亚纯截面 s，$[(s)]=L$。

$$\begin{tikzcd} MS(L) \arrow[r, "()"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & {[\ ]^{-1}(L)} \arrow[r] \arrow[d, "{[\ ]}"] & 0 \\ & L & \end{tikzcd}$$

推论 9.2.4.

L 是某个除子 D 对应的线丛 $\iff$ 它存在一个非恒零的全局亚纯截面。

L 是某个有效除子 D 对应的线丛 $\iff$ 它存在一个非恒零的全局全纯截面。

（第二个推论原因如下：如果线丛有非恒零的全局全纯截面，那么 (s) 已经满足要求了；如果它是某个有效除子 D 对应的线丛，那么 $(s_f)=D$ 则 s_f 满足要求）

定义 9.2.5. 对于任何 $D=\sum a_iV_i$，记 $\mathscr{L}(D)$ 为所有使得 $D+(f)\geq 0$ 的亚纯函数 f 构成的空间。

记全体和 D 线性等价的有效除子构成的集合为 $|D|$，当 $L=[D]$ 时也将此线性等价类记为 $|L|(=[\ ]^{-1}L)$。

命题 9.2.6. 有 $\mathbb{C}$-线性空间同构：

$$\mathscr{L}(D)\to H^0(M,\mathscr{O}(D))$$

证明. 设 s_0 是 $[D]$ 的一个全局亚纯截面，并且 $(s_0)=D$。那么对于任何 $[D]$ 的全纯截面 s，考虑 $f_s=s/s_0$：这依然是一个 M 上的亚纯截面，并且 $(f_s)=(s)-(s_0)\geq -D$。于是：$f_s\in\mathscr{L}(D)$，$(s)=D+(f_s)\in|D|$。

另外，对于任何 $f\in\mathscr{L}(D)$，以及固定的亚纯截面 s_0（如前），都有 $s=f\cdot s_0$ 是 $[D]$ 的全纯截面。因此有同构：

$$\mathscr{L}(D)\xrightarrow{\otimes s_0}H^0(M,\mathscr{O}(D))$$

□

定义 9.2.7. 对于一个除子 $D=\sum a_iV_i$ 和一般的全纯向量丛 E，记 $\mathscr{E}(D)$ 为 E 的全体满足在 $\cup V_i$ 全纯且在每个 V_i 的极点阶 $\leq a_i$ 的亚纯截面构成的层；$\mathscr{E}(-D)$ 为全体满足在每个 V_i 的零点阶 $\geq a_i$ 的截面构成的层。那么与线丛类似地：

$$\mathscr{E}(D)\xrightarrow{\otimes s_0}\mathscr{O}(E\otimes[D])$$

$$\mathscr{E}(-D)\xrightarrow{\otimes s_0^{-1}}\mathscr{O}(E\otimes[-D])$$

也有着对应关系。因此有层正合列：

$$0\to\mathscr{O}_M(E\otimes[-D])\xrightarrow{\otimes s_0}\mathscr{O}_M(E)\xrightarrow{r}\mathscr{O}_M(E|_D)\to 0$$

（回忆第 3.1.3 节）

在后文中，一般记 $\mathscr{O}([D])$ 为 $\mathscr{O}(D)$。

命题 9.2.8. 对于紧复流形 M：

$$|D| \cong \mathbb{P}(\mathscr{L}(D)) \cong \mathbb{P}(H^0(M, \mathscr{O}(D)))$$

证明. 对于一个紧复流形 M，任何 $D' \in |D|$，存在 $f \in \mathscr{L}(D)$ 使得 $D' = D + (f)$。（首先这个亚纯函数 f 肯定存在，由 $\mathscr{L}$ 定义立刻推知结果）并且反过来任何两个满足要求的亚纯函数 f, f' 一定满足 f/f' 是非零全纯函数。然而 M 是紧的，由最大模原理知 f, f' 只能相差一个非零常数，因此这就说明了结果。 □

定义 9.2.9 (Linear system of divisors). $\mathbb{P}(H^0(M, \mathscr{O}(L)))$ 的射影子空间（的零点集和极点集）对应了一组 M 的有效除子。称这个有效除子构成的线性子空间为 linear system of divisors。

称它是完备的，如果它对应的这组有效除子恰好具有形式 $|D|$，即和 D 线性等价的有效除子对应的 $[D]$ 上全纯截面的射影子空间。

定义这个 linear system 的维数为其作为射影子空间的维数。($\dim W - 1$)

称 1 维 linear system 为 pencil；2 维者为 net；3 维者为 web。

定义 9.2.10 (Base locus). 对于一个 linear system：$E = \{D_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^n}$，选取其在射影子空间的一组基 $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$。

那么：

$$\cap_{\lambda \in \mathbb{P}^n} \operatorname{supp} D_\lambda = \operatorname{supp} D_{\lambda_0} \cap \cdots \cap \operatorname{supp} D_{\lambda_n}$$

定义它为 linear system E 的 base locus。特别地，对于 base locus 中的除子 F：$D_\lambda - F \geq 0 \quad \forall \lambda$，称它们为 E 的 fixed component。

The Bertini's thm part:To Be Continued.

9.3 Chern-Weil 理论

下面, 我们从一个联络的曲率 2-形式中提取出一些不变量, 这些不变量不依赖于联络的选取.

定义 9.3.1. n 阶矩阵的不变多项式 (invariant polynomial) 是指一个函数

$$P : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C},$$

它是 n^2 个矩阵元的多项式, 并满足对任意矩阵 A 和可逆矩阵 T, 有

$$P(TAT^{-1}) = P(A).$$

设 P 是 n 阶矩阵的不变多项式. 则 P 一定是矩阵的 n 个特征值的对称多项式, 由此推出 P 一定具有

$$P(A) = p(trA,\ trA^2,\ \ldots,\ trA^n)$$

的形式, 其中 p 是多项式.

设 $E \to M$ 是光滑复向量丛, 带有联络 ∇。一个不变多项式给出了向量丛 $End(E)$ 的每个纤维到 $\mathbb{C}$ 的函数, 因为其取值不依赖于基的选取, 只依赖于线性算子的特征值。这个函数可以把 $End(E)$-取值的微分形式变成普通的微分形式。

设 P 是不变多项式. 我们将它作用在曲率 2-形式 Ω 上, 得到一个形式

$$P(\Omega) \in \Omega^{2\bullet}(M, \mathbb{C}).$$

我们将证明, 这个微分形式是闭形式, 且它给出的 de Rham 上同调类不依赖于联络的选取.

命题 9.3.2. $P(\Omega)$ 是闭形式。

证明. 将 P 写成 $p(\mathrm{tr}A^i)$ 的形式。因为闭形式的外积仍然是闭形式, 所以, 我们只需证明

$$d\mathrm{tr}\Omega^k = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

而由 Bianchi 恒等式, 由归纳法不难证明

$$d\Omega^k = [\Omega^k, \omega] \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

这里 ω 是联络方阵。因此,

$$d\mathrm{tr}\Omega^k = \mathrm{tr}d\Omega^k = \ tr[\Omega^k, \omega] = 0.$$

□

命题 9.3.3. 上同调类 $[P(\Omega)] \in H^{2\bullet}(M; \mathbb{C})$ 不依赖于联络 ∇ 的选取。

证明. 设 ∇^0, ∇^1 是 E 上的两个联络。考虑向量丛 $E \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$, 带有联络

$$\nabla = t\widetilde{\nabla}^1 + (1-t)\widetilde{\nabla}^0,$$

其中 $\widetilde{\nabla}^i$ $(i = 1, 2)$ 是 $E \times \mathbb{R}$ 上的联络，使得截面沿 E 方向的导数由 ∇^i 给出，沿 $\mathbb{R}$ 方向的导数由普通的导数给出。换言之, $\widetilde{\nabla}^i$ 是将 ∇^i 的联络 1-形式沿着投影映射拉回，所定义的 $E \times \mathbb{R}$ 上的联络。

记 $i_0, i_1 : M \hookrightarrow M \times \mathbb{R}$ 为含入映射，其 $\mathbb{R}$-分量分别为 0 和 1。记 Ω^0, Ω^1 分别为 ∇^0, ∇^1 的曲率形式。则

$$[P(\Omega^0)] = i_0^* [P(\Omega)] = i_1^* [P(\Omega)] = [P(\Omega^1)],$$

因为 i_0, i_1 是同伦的映射。 □

于是对每个不变多项式 P，上同调类 $[P(\Omega)]$ 给出了复向量丛的拓扑不变量。我们希望利用这个结果来定义出向量丛的某些示性类。这实际上就是 Chern-Weil 理论的开始动机。

定义 9.3.4. 设 $1 \leq k \leq n$ 为整数. 对 n 阶复矩阵 A, 我们记

$$\sigma_k(A) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}$$

为 A 的 n 个特征值的第 k 个初等对称多项式, 它是一个不变多项式。

注记. 在一般的示性类理论中, Chern 类的定义通常是由分类空间的上同调给出的, 但是 Chern-Weil 理论给出了一个等价的并且不依赖于分类空间的描述。在这里我们不会过多地考虑分类空间，自然也不会讨论两种定义的等价性。因此只需直接承认这些结论即可，具体内容可以参考 [卜辰璟] 的相关内容。

定义 9.3.5 (Chern 示性类). 复向量丛 E 关于联络 D，曲率 Ω 的第 k 个 Chern 类（Chern 形式）定义为：

$$c_k(E) = \frac{1}{(-2\pi\sqrt{-1})^k}[\sigma_k(\Omega)].$$

其中 σ_k 如前定义，$c_k \in H^{2k}_{dR}(M,\mathbb{C})$。

定义全 Chern 类：$c(E) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(E)$。这里的无限求和当然是形式上的。

进一步地：有

$$c(E) = [\det(I - \frac{\Omega}{2\pi\sqrt{-1}})]$$

利用这一结果，可以说明 Chern 示性类满足如下性质：

命题 9.3.6.

1. 初始条件： $c_0(E) = 1$

2. 自然性：对于流形间态射 $f : M' \to M$，M *上向量丛* E *及其拉回丛* f^*E，*那么* $c_i(f^*E) = f^*c_i(E)$

3. Whitney 乘积： $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1) \wedge c(E_2)$

4. 归一化条件：对于复向量丛 $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}P^1$（*映射是自然的投影*），*定义* $c_1(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}P^1)$ *使得* $\int c_1(\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}P^1) = -1$

事实上满足这些要求的示性类选取有且仅有 Chern 类，这是 Chern 类的公理化定义。

特别地，对于全纯向量丛 $E \to M$ 有如下结果

命题 9.3.7. *对于全纯向量丛* E *以及其上携带的 Chern 联络和对应的曲率，这样定义出的 Chern 类* c_k *总是时的微分形式。*

证明. 选取一组酉标架，那么：

$$\overline{\det\left(I - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Omega\right)} = \det\left(I + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\bar{\Omega}\right) = \det\left(I - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Omega^T\right) = \det\left(I - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\Omega\right)$$

从而的确是实形式。 □

我们给出第一 Chern 类的具体计算：

命题 9.3.8. $c_1(E) = \dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log(\det h)$

证明.

$$\begin{aligned} c_1(E) &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{tr}\Omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{tr}(\bar{\partial}(h^{-1}\partial h)) \\ &\xlongequal{\text{(Elementary)}} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial\det h \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}c_1(\wedge^r E) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial\log(\det h) \end{aligned}$$

□

9.3.1 Chern 特征，Chern 示性数

定义 9.3.9 (Chern 特征).

$$\mathrm{ch}(E)=\mathrm{tr}\left(\exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right)=\mathrm{tr}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k\Omega^k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k\mathrm{tr}(\Omega^k)$$

作为 K 理论的先声，我们还将指出 $\mathrm{ch}:K(X)\to H^\bullet(X)$ 是一个环同态。这相当于说明以下两个结果：

命题 9.3.10.

$$\mathrm{ch}(E\oplus F)=\mathrm{ch}(E)+\mathrm{ch}(F)$$

$$\mathrm{ch}(E\otimes F)=\mathrm{ch}(E)\mathrm{ch}(F)$$

证明. 前者是简单的，后者需要利用曲率矩阵在张量积下的行为命题 4.2.15进行一些计算即可。 □

定义 9.3.11 (Chern 示性数). 对于 n 维复流形，多重指标 $K=(k_1,\cdots,k_r),k_1+\cdots+k_r=n$，那么定义复向量丛关于指标 K 的 Chern 示性数为：

$$C_K(E)=\int_M c_{k_1}(E)\wedge\cdots\wedge c_{k_r}(E)$$

9.3.2 线丛的例子

对于紧 Riemann 面上的全纯线丛 L，其度量局部上由函数 h 决定，那么 $\Theta=\bar\partial\partial(\log h)$。因此全纯线丛 L 的 Chern 示性数：

$$C_1(L)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_M\bar\partial\partial(\log h)$$

考虑紧 Riemann 面上的除子：$D=n_1P_1+\cdots+n_kP_k$：注意到紧 Riemann 面上的主解析集只能是点。

注意到示性类不依赖于联络的选取，因此可以任意地给出线丛 $[D]$ 上的 Hermite 度量。回忆 Weil 除子 $\to$Cartier 除子 $\to$ 线丛的构造路径，选取一组开覆盖 U_α 和其上亚纯函数 f_α（满足 $P_i\in U_\alpha$ 则 P_i 为 f_α 的 n_i 阶零/极点），线丛的转移函数则由 $g_{\alpha\beta}=\dfrac{f_\alpha}{f_\beta}$ 给出。

因此在 U_α 上给出一组度量 h_α，那么 $h_\beta=|g_{\alpha\beta}|^2h_\alpha$，并且前文定义指出 $|f_\alpha|^2=|g_{\alpha\beta}|^2\cdot|f_\beta|^2$。我们当然无妨假定每个 U_α 足够小，并有 $h_\alpha=|f_\alpha|^{-2}$，且 $U_\alpha\cap U_\beta$ 中不存在 P_i。于是：

$$C_1([D])=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int\bar\partial\partial(\log|f_\alpha|^{-2})=\sum_\alpha\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{U_\alpha}-\bar\partial\partial(\log|f_\alpha|^2)$$

$$=\sum_\alpha\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{U_\alpha}-(\partial+\bar\partial)\partial(\log|f_\alpha|^2)=\sum_\alpha\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{\partial U_\alpha}-\partial(\log f_\alpha+\log\bar f_\alpha)$$

由于 $\log\bar f_\alpha$ 是反全纯函数，因此在 ∂ 作用下消失，于是：

$$C_1([D])=\sum_\alpha\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial U_\alpha}\frac{f'_\alpha}{f_\alpha}=\deg D$$

（其中最后一个等号是幅角原理）

推论 9.3.12 (留数定理). *紧 Riemann 面上的亚纯函数 f 一定满足*

$$\deg(f) = 0$$

证明. 亚纯函数诱导的线丛是平凡丛，后者的 Chern 类是平凡的。 □

一个计算的特例：

对于 $\mathbb{C}P^1$ 上的线丛 $\mathscr{O}(k)$，回忆我们定义过的标准度量 $\dfrac{1}{(1+|s|^2)^k}$，此时计算知：

$$c_1(\mathscr{O}(k), \mathbb{C}P^1) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log h$$

$$= k \cdot \partial\bar{\partial}\log(1+|s|^2) = k \cdot \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{1}{(1+|s|^2)^2}$$

现在考虑 Chern 示性数：

$$< c_1(\mathscr{O}(k)), [\mathbb{C}P^1] >= \int \frac{k\sqrt{-1}ds \wedge d\bar{s}}{(1+|s|^2)^2} = k$$

这确实符合前一结果：因为 $\mathscr{O}(K)$ 确实是由次数为 K 的除子诱导的。

9.3.3 第一 Chern 类的等价定义

下面给出紧复流形上光滑线丛的 Chern 类 c_1 的另一个定义。

首先从全纯线丛 L 出发：由层正合列

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathscr{O} \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}^* \to 0$$

有边缘映射 δ：

$$H^1(M, \mathscr{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2_{dR}(M, \mathbb{C})$$

对于线丛 $L \in Pic(M) = H^1(M, \mathscr{O}^*)$，其 Chern 类 $c_1(L)$ 定义为它在上述映射复合下的像。特别地，进一步定义除子 D 的 Chern 类为 $c_1([D])$。

因此前文已经说明的性质在这里也可以立刻得到：

$$c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L')$$

$$c_1(L^*) = -c_1(L)$$

上同调群的自然性能够说明这里示性类的自然性：

$$c_1(f^*L) = f^*c_1(L)$$

进一步地，对于一个光滑线丛，再一次地有 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathscr{C} \to \mathscr{C}^* \to 0$。同样光滑线丛与 $H^1(M, \mathscr{C}^*)$ 存在对应（再一次注意转移函数和 Cech 上同调之间的一一对应），因此可以同样定义出光滑线丛的 Chern 类 c_1，并且很明显两个定义是相容的。

然而考虑正合列 $H^1(M, \mathscr{C}) \to H^1(M, \mathscr{C}^*) \xrightarrow{\delta'} H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2_{dR}(M, \mathbb{C})$，注意到 $H^1(M, \mathscr{C}) = 0$，因为 $\mathscr{A}$ 是 fine 层。于是：这说明了 Chern 示性类 c_1 能够完全分类出所有的光滑线丛（C^∞ 同构意义下）。

对于 k 维解析子簇 V，自然定义 fundamental class$(V) \in H_{2k}(M,\mathbb{R})$，由线性泛函给出：

$$\varphi \mapsto \int_V \varphi$$

记其 Poincare 对偶为 η_V。对于除子 D，同样定义 $\eta_D = \sum a_i \cdot \eta_{V_i}$。

定理 9.3.13. *在 m 维紧复流形 M 中：*

1. *对于线丛 L，前文两种定义 c_1 的方式等价。*
2. *$c_1([D]) = \eta_D$，即 $c_1([D])$ 是 $[D] \in H_{2m-2}(M,\mathbb{R})$ 的 Poincare 对偶。*

证明. 对于第一个结果，首先回忆 de Rham 定理的证明（dimension shifting），将消解 $0 \to \mathbb{C} \to \mathscr{A}^0 \to \mathscr{A}^1 \to \mathscr{A}^2 \to \cdots$ 分解为如下两个短正合列：

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathscr{A}^0 \to \mathscr{K}_1 \to 0$$

$$0 \to \mathscr{K}_1 \to \mathscr{A}^1 \to \mathscr{K}_2 \to 0$$

那么由上同调群的长正合列，有：

$$0 \to H^1(M,\mathscr{K}_1) \to H^2(M,\mathbb{C}) \to 0$$

$$H^0(M,\mathscr{A}^1) \to H^0(M,\mathscr{K}_2) \to H^1(M,\mathscr{K}_1) \to 0$$

于是两个边缘映射：

$$\delta_2 : H^1(M,\mathscr{K}_1) \xrightarrow{\sim} H^2(M,\mathbb{C})$$

$$\delta_1 : \mathscr{K}_2(M)/\mathscr{A}^1(M)(= H^2_{dR}(M,\mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} H^1(M,\mathscr{K}_1)$$

的复合诱导了 de Rham 上同调和层上同调（Cech 上同调）之间的同构。

首先来看 δ_1：对于 $c_1(E) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta \in \mathscr{K}_2$，局部上有 $\Theta = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \cdot \bar{\partial}\partial \log h_\alpha = d(\partial \log h_\alpha)$。因此由边缘映射的定义，其在 $H^1(M,\mathscr{K}_1)$ 中的像如下：

$$[\{U_\alpha \cap U_\beta, \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(\partial \log h_\beta - \partial \log h_\alpha)\}]$$

对于线丛的 Cech 上同调对应：$[\{U_\alpha \cap U_\beta, \psi_{\alpha\beta}\}]$，其在 $H^2(M,\mathbb{Z})$ 的像为

$$[\{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma, \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}[\log \psi_{\alpha\beta} + \log \psi_{\beta\gamma} + \log \psi_{\gamma\alpha}]\}]$$

进一步地，前文内容在 δ_1 下的像正是此，因为：

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(\partial \log h_\beta - \partial \log h_\alpha) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial \log |\psi_{\alpha\beta}|^2 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \log \psi_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} d \log \psi_{\alpha\beta}$$

，因此其像正是

$$[\{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma, \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}[\log \psi_{\alpha\beta} + \log \psi_{\beta\gamma} + \log \psi_{\gamma\alpha}]\}]$$

对于第二个结果，这相当于说明：

$$\int_M c_1 \wedge \varphi = \sum a_i \int_{V_i} \varphi$$

（考虑用微分形式的积分方式写出的 Poincare 对偶即可）这需要一些繁杂的计算，参见 [Har94, Page 142]。 □

9.4 例子

接下来考虑一下具体的例子：

例子.

1. 对于复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 考虑长正合列：

$$H^1(\mathbb{C}P^n, \mathscr{O}) \to H^1(\mathbb{C}P^n, \mathscr{O}^*) \to H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{C}P^n, \mathscr{O})$$

由推论 *7.2.7*，知第一项和最后一项为 *0*，因此 $\mathbb{C}P^n$ 上的全纯线丛分类如下：

$$Pic(M) \cong H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

现在对于 $\mathbb{C}P^n$ 上的任何一个全纯线丛，可以记它为 $\mathscr{O}(n)$ 的形式。这个记号的意义在上一个同构的背景下是自明的。

首先来看生成元 $\mathscr{O}(-1)$：其定义为

$$E = \{(x, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} | v \in x\}, \pi(x, v) = x$$

它当然是线丛（每点的纤维就是对应的子空间 $\mathbb{C}$），考虑 E 的局部平凡化：$U_i = \{z \in \mathbb{C}P^n | z_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{C}P^n$，其上的平凡化由如下给出：

$$\{[z_0/z_i, \cdots, z_{i-1}/z_i, 1, z_{i+1}/z_i, \cdots, z_n/z_i], (z_0, \cdots, z_n)\} \mapsto \{[z_0/z_i, \cdots, z_{i-1}/z_i, 1, z_{i+1}/z_i, \cdots, z_n/z_i], z_i\}$$

因而在坐标卡 $U_i \cap U_j$ 上，转移函数是 $g_{ij} = z_i/z_j$，它的确是全纯的（并且非平凡）于是的确是全纯丛，这个全纯线丛称为 $\mathbb{C}P^n$ 上的**自言线丛**（***tautological line bundle***）。

当然我们还没有说明为什么将自言线丛记为 $\mathscr{O}(-1)$ 是合理的。考虑亚纯截面

$$e(Z) = (1, z_1/z_0, \cdots, z_n/z_0)$$

由除子-亚纯截面对应知它对应了一个除子 $D = -H$，其中 H 是超平面 $e_0 = 0$。然而亚纯截面的除子一定是余 *1* 维的，因此这说明了 $\mathscr{O}(-1)$ 的定义确实合理，并且一切 $\mathbb{C}P^n$ 上的除子都线性等价于某个超平面除子的张量积和对偶。

对于 $\mathbb{C}P^n$ 的子流形 M，将超平面除子 H 对应的线丛 $[H]$ 的拉回定义为 M 的超平面线丛。它和 $\mathbb{C}P^{n-1} \cap M$ 对应的线丛是同一个（注意这里 $\mathbb{C}P^{n-1}$ 的选取应在 *generic* 情况）

2. 回忆法丛和余法丛（定义 *4.1.8*）：考虑光滑主解析集 V（光滑性保证了它是子流形），假定其在局部上的定义函数为 $f_\alpha \in \mathscr{O}(U_\alpha)$。那么线丛 $[V]$ 由如下转移函数 $g_{\alpha\beta} = f_\alpha/f_\beta$ 确定。

然而在 $V \cap U_\alpha$ 上 $f_\alpha \equiv 0$，并且 V 是光滑的，于是 df_α 是余法丛 N_V^* 的一个在 U_α 中非零的截面。因而是余法丛的局部平凡化，计算平凡化的转移函数：

$$d(f_\alpha) = d(g_{\alpha\beta} f_\beta) = dg_{\alpha\beta} \cdot f_\beta + g_{\alpha\beta} \cdot df_\beta = g_{\alpha\beta} \cdot df_\beta$$

于是余法丛的转移函数实际上是 $g_{\alpha\beta}^{-1}$，因此有：

定理 9.4.1 (Adjunction Formula 1.).

$$N_V^* = [-V]\Big|_V$$

3. 典范线丛：对于任何 n 维复流形 M，有一个典范线丛：

$$K_M = \wedge^n T^{*\prime} M$$

于是全纯截面 $\mathscr{O}(K_M)$ 正是全纯 n 形式 Ω^n。

现在考虑 $\mathbb{C}P^n$ 上的典范线丛 $K_{\mathbb{C}P^n}$，其转移函数为切丛转移函数的行列式。计算知其 *Jacobian* 具有形式

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\zeta^i} & \cdots & 0 & -\frac{\zeta^1}{(\zeta^i)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\zeta^i} & -\frac{\zeta^{i-1}}{(\zeta^i)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{(\zeta^i)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\zeta^{i+1}}{(\zeta^i)^2} & \frac{1}{\zeta^i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\zeta^n}{(\zeta^i)^2} & 0 & \cdots & \frac{1}{\zeta^i} \end{pmatrix}$$

计算可得 $g_{ij}([z]) = (-1)^{i+j}\left(\frac{z^i}{z^j}\right)^{-n-1}$，于是考虑前文得到的结论，自然有：

$$K_{\mathbb{C}P^n} = \mathscr{O}(-n-1)$$

现在对于复流形 M 的一个光滑主解析集 V，有正合列 $0 \to N_V^* \to T_M^{*\prime}|_V \to T_V^{*\prime} \to 0$ 通过观察基可以发现：

$$(\wedge^n T_M^{*\prime})|_V \cong \wedge^{n-1} T_V^{*\prime} \otimes N_V^*$$

因此 $K_M|_V = K_V \otimes N_V^*$，即：$K_V = K_M|_V \otimes N_V$

于是由 *Adjunction formula 1*，有：

定理 9.4.2 (Adjunction formula 2.).

$$K_V = (K_M \otimes [V])\Big|_V$$

4. Poincare residue：下面给出一个具体描述映射 $\Omega_M^n(V) \to \Omega_V^{n-1}$ 的方法，称为 *Poincare residue map*。

考虑 $\Omega_M^n(V)$ 的亚纯截面，使得它在 V 有一阶极点，其它点处处全纯。亦即：

$$\omega = \frac{g(z)dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{f(z)}$$

其中 $f(z)$ 是 V 局部的定义函数。

我们希望将 ω 写成 $df/f \wedge \rho$ 的形式，并将其像定义为 ρ。构造如下：存在 i 使得 $\partial f/\partial z_i \neq 0$，那么：

$$\rho = (-1)^{i-1} \cdot \frac{g(z)dz_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \cdots \wedge dz_n}{\partial f/\partial z_i}$$

满足要求，将其限制到 V 上即可。

我们现在说明这样的选择是唯一的，如果另一个 V 上的形式 ρ' 满足 $\omega = df/f \wedge \rho'$，于是 $df/f \wedge (\rho' - \rho) = 0$，限制进 V 上结果由 $df = 0$ 直接推出。这个定义也可以从局部推至整体：如果 $f = ug$，$d(ug)/(ug) \wedge \rho = dg/g \wedge \rho + du/u \wedge \rho = (dg/g) \wedge \rho'$。限制进 V 就得到了结论。

现在有短正合列：$0 \to \Omega_M^n \to \Omega_M^n(V) \xrightarrow{P.R.} \Omega_V^{n-1} \to 0$，就有长正合列：

$$H^0(M, \Omega_M^n(V)) \xrightarrow{P.R.} H^0(V, \Omega_V^{n-1}) \xrightarrow{\delta} H^1(M, \Omega_M^n)$$

因此一旦 $H^{n,1}(M) = H^1(M, \Omega_M^n) = 0$（如 $\mathbb{C}P^n$）就有 *Poincare residue* 是满射。

于是 $\mathbb{C}P^n$ 中的主解析集 V 上的最高次全纯形式一定是 $\mathbb{C}P^n$ 某个亚纯形式在 $P.R.$ 下的像。这提供了描述 V 上最高次形式的方法。

第十章　消没定理

10.1　Kodaira 消没定理

定义 10.1.1 (正线丛/ample). 对于紧 Kahler 流形 M，称其上全纯线丛 $L \to M$ 是正 (positive/ample) 线丛，如果其上存在一个度量，使得对应的第一 Chern 类 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta$ 是正定的 $(1,1)$ 形式。(关于 Chern 类的讨论指出了它是实形式，$(1,1)$ 源于曲率部分的讨论。(注意给定度量后这里联络的选择都是按 Chern 联络进行的)

称一个线丛 L 是负线丛，如果 L^* 是正线丛。

我们现在要说明正线丛是拓扑性质：

命题 10.1.2. *对于实闭 $(1,1)$ 形式 ω，满足：*

$$[\omega] = c_1(L) \in H^2_{dR}(M, \mathbb{C})$$

那么存在一个 L 上的度量使得其 Chern 联络的曲率 $\Theta = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\omega$，于是 L 是正线丛当且仅当其 Chern 类是 $H^2_{dR}(M, \mathbb{C})$ 的正定形式。

证明. 前文已证联络对 Chern 类无影响，因此只需说明对于任何实闭形式 $(\sqrt{-1}/2\pi)\varphi$，以下方程存在解：

$$\Theta = \partial\bar{\partial}\rho + \varphi$$

这里 Θ 是度量 $|s|^2$ 对应的曲率，如果存在实光滑解 ρ，那么 $e^\rho|s|^2$ 就是一个使得 φ 成为对应曲率形式的度量。

因此只需说明如下结果：对于紧 Kahler 流形上的 $(p,q)-$ 形式 η，如果它是 $d-, \bar{\partial}-, \partial-$ 恰当的 (三选一)，那么：

$$\eta = \partial\bar{\partial}\gamma$$

对某个 $(p-1, q-1)$ 形式 γ 成立。更进一步地，如果 $p = q$，且 η 是实的，那么 $\sqrt{-1}\gamma$ 也可以选取成为实的形式。

取 Green 算子 G_d (对 $\partial, \bar{\partial}$ 同理)。由 $1/2\Box_d = \Box_{\bar{\partial}} = \Box_\partial$，知 Green 算子满足：

$$2G_d = G_{\bar{\partial}} = G_\partial$$

并且 G 和 $d, \partial, \bar{\partial}, d^*, \partial^*, \bar{\partial}^*$ 均交换。

由于 η 是 $d - /\bar{\partial} - /\partial-$ 恰当的，那么其在到调和形式的投影下的像均为 0。于是：

$$\eta = \bar{\partial}\bar{\partial}^* G_{\bar{\partial}}\eta$$

但是 $\bar{\partial}^* G_{\bar{\partial}}\eta$ 是 $(p, q-1)$ 型的，于是：

$$\partial(\bar{\partial}^* G_{\bar{\partial}}\eta) = \bar{\partial}^* G_{\bar{\partial}}(\partial\eta) = 0$$

由于 $\bar{\partial}-, \partial-$ 调和的形式相同，并且和 $\bar{\partial}^*$ 的值域正交，那么：

$$\bar{\partial}^* G_{\bar{\partial}}\eta = \partial\partial^* G_{\partial}(\bar{\partial}^* G_{\bar{\partial}}\eta)$$

从而：

$$\eta = \pm\bar{\partial}\partial(\partial^*\bar{\partial}^* G_{\bar{\partial}} G_{\bar{\partial}}\eta)$$

z 于是这就是欲证结果。 □

正如在 Hodge 定理部分中已经提及的那样，关于微分形式的许多结论可以推广到丛取值微分形式上。简单罗列如下：

1. $A^{p,q}(E)$ 上的 $\bar{\partial}$ 算子：Chern 联络的 $(0,1)$ 部分，满足 $\bar{\partial}^2 = 0$ (因为曲率取值是 $(1,1)$-型的)。

2. Dolbeault 上同调群 $H^{p,q}_{\bar{\partial}}(E)$。

3. Dolbeault 定理：$H^q(M, \Omega^p(E)) \cong H^{p,q}_{\bar{\partial}}(E)$。基于同样的原因局部零调 (Poincare 引理) 仍然成立，于是有和一般的 Dolbeault 定理中一样的消解)

4. 全纯向量丛上 Hodge 理论：在 $\mathscr{A}(E)$ 上 $\bar{\partial}$ 良好定义，其上存在的 Hermitian 内积使得 Hodge 理论可以完全搬至这里的情况。

定理 10.1.3 ($E-$ 取值 Hodge 定理)**.** *定理 6.2.1，但是将全纯线丛修改为全纯向量丛。*

定理 10.1.4 (Kodaira-Serre 对偶)**.**

$$H^q(M, \Omega^p(E)) \cong H^{n-q}(M, \Omega^{n-p}(E^*))$$

5. Kahler 恒等式：对于 Kahler 流形 M 以及其上 Kahler 形式 ω，定义算子

$$L : A^{p,q}(E) = A^{p+1,q+1}(E)$$

$$L(\eta \otimes s) = (\omega \wedge \eta) \otimes s \quad \eta \in A^{p,q}(M), s \in A^0(E)$$

定义 $\Lambda = L^*$ 为其对偶。

对于 Chern 联络的型分解 $D = D' + D''(D'' = \bar{\partial})$，有：

定理 10.1.5 (Hodge 恒等式 1)**.**

$$[\Lambda, \bar{\partial}] = -\sqrt{-1}D'^*$$

取共轭即有：

$$[\Lambda, D'] = \sqrt{-1}\bar{\partial}^*$$

取伴随即有对应的另外两个恒等式。

这是定理 7.2.1的推广，证明也是类似的。

命题 10.1.6. *命题 7.3.1，但是推广到全纯向量丛。*

6. 若干 Laplacian：对于一个固定的联络（现在是 Chern 联络）D，仿照外微分式上的情况也可以给出三个 Laplacian。首先给出 D 的型分解 $D'+\bar\partial$。那么对于 $\bar\partial, D, D'$ 各自可以定义出 Laplacian：

1. $\bar\partial-$Laplacian$\square_{\bar\partial}$
2. 全 Laplacian$\square$
3. “全纯”Laplacian$\square'$

定理 10.1.7 (Kodaira-Akizuki-Nakano 恒等式)**.**

$$\square_{\bar\partial}=\square'+\sqrt{-1}[D^2,\Lambda]$$

D^2 代表曲率，Λ 是 L 算子的伴随。

证明.

$$\square_{\bar\partial}=\bar\partial^*\bar\partial+\bar\partial\bar\partial^*$$

而由 Hodge 恒等式知：

$$\square_{\bar\partial}=-\sqrt{-1}(\bar\partial[\Lambda,D']+[\Lambda,D']\bar\partial)$$
$$=-\sqrt{-1}(\bar\partial\Lambda D'-\bar\partial D'\Lambda+\Lambda D'\bar\partial-D'\Lambda\bar\partial)$$

反复使用交换子和 Hodge 恒等式即可知其为 $\square'$ □

定理 10.1.8 (Kodaira-Akizuki-Nakano 消没定理, 通常版本)**.** *对于紧复流形 M，若其上有正线丛 E，那么：*

$$H^q(M,\Omega^p(E))=0\quad\forall p+q>n$$

证明. 在 E 上选取 Hermitian 度量，当然它有对应的 Chern 联络，由正线丛的定义，其 Chern 联络对应的曲率矩阵 Θ 满足：$\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}$ 是正定形式。因此这实际上是一个 Kahler 形式，于是流形 M 实际上是紧 Kahler 的。

现在我们可以使用紧 Kahler 流形上的 Hodge 理论。这只需说明对于 $p+q<n$，不存在 $\square_{\bar\partial}-$ 调和的 $E-$ 取值 (p,q) 形式。

对于一个 $\square_{\bar\partial}-$ 调和的 $E-$ 取值 (p,q) 形式 η，由于曲率形式满足：

$$\Theta=D^2=\bar\partial D'+D'\bar\partial$$

（不存在 D'^2 项的原因是因为 Chern 联络对应的曲率仅有 $(1,1)$ 形式组成）

然而 $\square_{\bar\partial}-$ 调和形式寿命 $\bar\partial\eta=0$，于是

$$\Theta\eta=\bar\partial D'\eta$$

$$\sqrt{-1}(\Lambda\Theta\eta,\eta)=\sqrt{-1}(\Lambda\bar\partial D'\eta,\eta)$$
$$=\sqrt{-1}((\bar\partial\Lambda-\sqrt{-1}D'^*)D'\eta,\eta)\quad (Hodge\ identity)$$
$$=(D'^*D'\eta,\eta)=(D'\eta,D'\eta)\geq 0$$

倒数第二个等号是因为：

$$(\bar{\partial}\Lambda D'\eta,\eta)=(\Lambda D'\eta,\bar{\partial}^*\eta)=0$$

同理，有：

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}(\Theta\Lambda\eta,\eta)&=\sqrt{-1}[(D'\bar{\partial}\Lambda\eta,\eta)+(\bar{\partial}D'\Lambda\eta,\eta)]\\&=\sqrt{-1}[(D'\bar{\partial}\Lambda\eta,\eta)+(D'\Lambda\eta,\bar{\partial}^*\eta)]\\&=\sqrt{-1}(D'\bar{\partial}\eta,\eta)\\&=\sqrt{-1}(D'(\Lambda\bar{\partial}+\sqrt{-1}D'^*)\eta,\eta)\\&=-(D'D'^*\eta,\eta)=-(D'^*\eta,D'^*\eta)\le 0\end{aligned}$$

于是

$$\sqrt{-1}([\Lambda,\Theta]\eta,\eta)\ge 0$$

现在回忆刚刚选取 Kahler 形式的方式，因此有 $\Theta=\dfrac{2\pi}{\sqrt{-1}}L$，于是

$$\sqrt{-1}([\Lambda,\Theta]\eta,\eta)=2\pi([\Lambda,L]\eta,\eta)$$

$$=2\pi(n-p-q)||\eta||^2\ge 0$$

因此 $p+q>n\implies\eta=0$。

□

我们现在指出对偶版本的消没定理，它与通常的版本之间相差一个 Serre 对偶：

定理 10.1.9 (Kodaira-Akizuki-Nakano 消没定理, 对偶版本). *对于紧复流形 M，若其上有负线丛 E，那么：*

$$H^q(M,\Omega^p(E))=0\quad\forall p+q<n$$

推论 10.1.10. *条件同通常 Kodaira 消没定理，*

$$H^q(M,\mathscr{O}(K_M\otimes E))=0,q>0$$

只需注意到 $K_M\otimes E$ 和 $\wedge^{\dim M}(E)$ 相同即可。

定理 10.1.11 (Kodaira-Akizuki-Nakano 消没定理, 渐近形式). *对于 n 维紧复流形 M 上的正线丛 L，由前文讨论知 M 自动成为 Kahler 流形。对于任何全纯向量丛 $E\to M$，都有对于充分大的 r：*

$$H^p(M,\mathscr{O}(E\otimes L^r))=0$$

对每个 p 成立。

证明. 由于对 $p>n$ 时总有上同调群天然为 0，因此使上同调群不消失的 p 只有有限个，于是这个问题中我们无妨固定 p。

由 Kodaira-Serre 对偶：等价地只需说明对于任何负线丛 L，对每个固定的 $p<n$ 有

$$H^p(M, \mathscr{O}(E\otimes L^{-r}))=0$$

对充分大 r 成立，更进一步地这等价于 Dolbeault 上同调群的消没：

$$H^{(0,p)}(M, \mathscr{O}(E\otimes L^{-r}))=0$$

选取 L 上的 Hermitian 度量使得 $\Theta_L=\sqrt{-1}\omega$，ω 是 Kahler 形式，于是进一步诱导了流形 M 上的 Kahler 度量，E 上随意指定一个 Hermitian 度量。

记 L, E 上的 Chern 联络分别为 ∇_L, ∇_E，考虑诱导在 $E\otimes L^r$ 上的度量，其 Chern 联络对应的曲率形式为 $\Theta_E+1_E\otimes r\Theta_L$。

现在考虑 Kodaira-Akizuki-Nakano 恒等式：

$$\Box_{\bar\partial}=\Box'+\sqrt{-1}[\nabla^2,\Lambda]$$

首先由于 $(\Box'\alpha,\alpha)=(D'D'^*\alpha,\alpha)+(D'^*D'\alpha,\alpha)=||D'\alpha||^2+||D'^*\alpha||^2\geq 0$。

现在对于恒等式的第二项，其在 $(0,p)-$ 形式上的作用

$$\sqrt{-1}[\nabla^2,\Lambda]=\sqrt{-1}[\Theta_E,\Lambda]+r\sqrt{-1}[1\otimes\Theta_L,\Lambda]$$

$$=\sqrt{-1}[\Theta_E,\Lambda]+r\sqrt{-1}[\sqrt{-1}L,\Lambda]=\sqrt{-1}[\Theta_E,\Lambda]+r(n-p)$$

然而只需考虑 $p<n$ 的情况，于是第二项 $r(n-p)$ 可以充分大。

对于第一项 $\sqrt{-1}[\Theta_E,\Lambda]$，我们考虑

$$(\sqrt{-1}[\Theta_E,\Lambda]\alpha,\alpha)$$

可以验证随着指标的变化，这个算子的范数是一致有界的，因此对于充分大的 r，$\Box'$ 是严格正算子（$(\Box'\eta,\eta)>0, \text{unless } \eta=0$）于是这就说明了结论。 □

10.2 超平面截面的 Lefschetz 定理

定理 10.2.1 (超平面截面的 Lefschetz 定理). *对于射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 中的光滑主解析集 M，取一个超平面 H，以及 $V=H\cap M$ 满足它也是光滑的。（由 Bertini 定理，这种情况是 generic cases）考虑 $N\hookrightarrow M$ 诱导的上同调群之间的态射，那么：*

对于 $i\leq n-2$，$H^i(M,\mathbb{C})\to H^i(V,\mathbb{C})$ 是同构；

对于 $i=n-1$，$H^i(M,\mathbb{C})\to H^i(V,\mathbb{C})$ 是单射。

更一般地可以假定 M 是 n 维紧复 Kahler 流形（当然 Kahler 性质可以由正线丛的存在性自动得到），$V\subseteq M$ 是光滑主解析集并且 $L=[V]$ 是正线丛。很容易验证第一个版本的此定理是满足这个要求的。

证明. 由于紧 Kahler 流形的子流形都是紧 Kahler 的，因此可以运用 Hodge 分解：

$$H^m(M,\mathbb{C}) = \oplus_{p+q=m} H^q(M,\Omega^p)$$

$$H^m(N,\mathbb{C}) = \oplus_{p+q=m} H^q(N,\Omega^p)$$

我们只需证明：对于 $p+q<n-1$，$H^q(M,\Omega^p)\to H^q(N,\Omega^p)$ 是同构；以及对于 $p+q=n-1$，这个映射是单射。

首先考虑限制映射 $\Omega^p_M \xrightarrow{r} \Omega^p_M\Big|_V \xrightarrow{i} \Omega^p_V$，其中第一个映射是层的限制映射，第二个则是拉回。这里 $\Omega^M_p\Big|_V$ 是作为 V 上的层然后延拓到 M 上的，于是自然是满的。

注意 $\ker r$ 就是所有在 V 上消失的全纯 p 形式，于是有 M 上的层正合列：

$$0\to \Omega^p_M(-V)\to\Omega^p_M \xrightarrow{r} \Omega^p_M\Big|_V \to 0$$

（回忆第 3.1.3 节的例子，以及消失 p 形式和线丛 $[-V]$ 的对应：$\Omega^p_M(-V) = (\wedge^p T^*)\otimes[-V]$）

对 i 也有类似的操作：首先对一点 p 有

$$0\to N^*_{V,p}\to T^*_{M,p}{}' \to T^*_{V,p}{}' \to 0$$

那么同前文，有

$$0\to N^*_{V,p}\otimes\wedge^{p-1}T^*_{V,p}{}' \to \wedge T^*_{M,p}{}' \to \wedge T^*_{V,p}{}' \to 0$$

于是在 V 上的层有正合列

$$0\to \Omega^{p-1}_V(N^*_V)\to \Omega^p_M\Big|_V \xrightarrow{i} \Omega^p_V \to 0$$

但是 $N^*_V = [-V]|_V$，因此

$$0\to \Omega^{p-1}_V(-V)\to \Omega^p_M\Big|_V \xrightarrow{i} \Omega^p_V \to 0$$

由于 $[-V]$ 是负线丛，于是由 Kodaira 消没定理：

$$H^q(M,\Omega^p_M(-V)) = H^q(V,\Omega^{p-1}_V(-V)) = 0, \quad p+q<n$$

那么考虑上述 r,i 所处正合列诱导的上同调长正合列，以及 $H^*(M,\Omega^p_M|_V) = H^*(V,\Omega^p_M|_V)$，即有：

$$H^q(M,\Omega^p_M) \overset{r^*}{\cong} H^q(M,\Omega^p_M|_V) = H^q(V,\Omega^p_M|_V) \overset{i^*}{\cong} H^q(V,\Omega^p_V) \quad p+q\le n-2$$

以及在 $p+q=n-1$ 时 r^*,i^* 都是单的。 □

注记. 正如证明过程加强的：对于紧复流形 M，和满足要求的正线丛 $[V]$（于是自然 Kahler），上述结论对于 Dolbeault 上同调群 $H^{p,q}$ 也成立。

推论 10.2.2. 对于 $\dim\ge 4$ 的光滑复射影簇 X，H 是一个超平面。那么：$Pic(X)\to Pic(X\cap H)$ 是同构。

10.3 射影簇的 Hodge 钻石

这一节我们应用 Lefschetz 超平面定理和 Hirzebruch-Riemann-Roch 来计算一般的射影簇的 Hodge 钻石。首先我们临时定义几个记号：

对于全纯向量丛 E，定义：

$$\chi^p(X,E) := \sum_{q\geq 0}(-1)^q h^{p,q}(X,E)$$

以及它的生成函数：

$$\chi_y(X,E) := \sum_{p\geq 0}\chi^p(X,E)\cdot y^p$$

现在我们的计算依赖于如下重要的结果：

定理 10.3.1 (Hirzebruch-Riemann-Roch).

$$\chi^0(X,E) =< todd(X)ch(E),[X] >$$

推论 10.3.2.

$$\chi^p(X,E) = \chi^0(X,\wedge^p T'^*X\otimes E) =< todd(X)ch(\wedge^p T'^*X)ch(E),[X] >$$

为了和前文定义的欧拉示性数的生成函数相符，我们定义对应的 Chern 特征的生成函数

$$ch_y(E) = \sum_{p\geq 0} ch(\wedge^p V)\cdot y^p$$

于是 HRR 的生成函数版本可以重写为：

$$\chi_y(X,E) =< todd(X)ch_y(T'^*X)ch(E),[X] >$$

现在考虑 m 次多项式在射影空间 $\mathbb{P}^N$ 中决定的子簇 Z，它等价于线丛 mH 的某个截面的零点集。由 Lefschetz 超平面定理：对于 $k<N-1$：

$$b_k(Z) = b_k(\mathbb{P}^N) = \frac{1+(-1)^k}{2}$$

从而由 Hodge 分解就可以立刻看出

$$h^{p,q}(Z) = \delta_{pq}, \forall p+q<N-1$$

于是由 Kodaira-Serre 对偶我们也能计算出 Hodge 钻石的上部分：它仍然是 δ_{pq}。

现在只需计算半维数 $N-1$ 上的情况。前文内容说明了：

$$\chi^p(Z) = (-1)^{n-1-p}h^{p,n-1-p}(Z) + (-1)^p, 2p\neq n-1$$

$$\chi^p(Z) = (-1)^p h^{p,p}(Z), 2p = n-1$$

因此现在我们只需计算 $\chi_y(Z)$。

由 Adjunction Formula，有正合列 $0\to TZ\to T\mathbb{P}^N|_Z\to[mH]|_Z\to 0$，于是由 todd 类的乘性：

$$todd(Z)\cdot todd((mH)|_Z)=todd(\mathbb{P}^N)|_Z$$

因此

$$todd(Z)=(\frac{h}{1-e^{-h}})^{N+1}\cdot\frac{1-e^{-mh}}{mh}$$

其中 $h=c_1(\mathscr{O}(1))$，切丛的 Todd Class 可以从 Euler 列看出等同于 $\mathscr{O}(1)^{\oplus N+1}$。

注意 $ch(E\oplus F)=ch(E)+ch(F)$，于是由定义可以看出 $ch_y(E\oplus F)=ch_y(E)\cdot ch_y(F)$。现在就有：

$$ch_y(T'^*Z)=ch_y(T'^*\mathbb{P}^N)ch_y(-mH)^{-1}=\frac{(1+ye^{-h})^{N+1}}{(1+y)(1+ye^{-mh})}|_Z$$

（再一次地，Euler 列说明 $ch_y(T'^*\mathbb{P}^N)=\dfrac{(1+ye^{-h})^{N+1}}{1+y}$，等等）

现在由（生成函数版本的）Hirzebruch-Riemann-Roch：

$$\begin{aligned}\chi_y(Z)=&<todd(Z)ch_y(T'^*Z),[Z]>\\=&<h^{N+1}(\frac{1+ye^{-h}}{1-e^{-h}})^{N+1}\cdot\frac{1-e^{-mh}}{mh}\cdot\frac{1}{(1+y)(1+ye^{-mh})},[Z]>\end{aligned}$$

注意 $<h^{N-1},[Z]>=m$，因此 $\chi_y(Z)$ 实际上是如下函数的 Laurent 级数展开的 z^{-1} 项的系数：

$$z\mapsto(\frac{1+ye^{-z}}{1-e^{-z}})^{N+1}\cdot\frac{1-e^{-mz}}{(1+z)(1+ze^{-mz})}$$

因此由留数定理：

$$\begin{aligned}\chi_y(Z)&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{|z|=\varepsilon}(\frac{1+ye^{-z}}{1-e^{-z}})^{N+1}\cdot\frac{1-e^{-mz}}{(1+y)(1+ye^{-mz})}dz\\&\xlongequal{\zeta=1-e^{-z}}\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_\varepsilon}(\frac{1+y(1-\zeta)}{\zeta})^{N+1}\cdot\frac{1-(1-\zeta)^m}{(1+y)(1-\zeta)(1+y(1-\zeta)^m)}d\zeta\end{aligned}$$

因此它就是

$$f_N(y,\zeta)=\frac{(1+y(1-\zeta))^{N+1}}{(1-\zeta)(1+y)}\cdot\frac{1-(1-\zeta)^m}{1+y(1-\zeta)^m}$$

的展开中 ζ^N 的系数。我们先按 y 展开，这样可以分离出诸 χ^p 的信息：假设 $f_N(y,\zeta)=\sum_{p\leq 0}f_{N,p}(\zeta)\cdot y^p$。先取 $u=1-\zeta$：此时

$$\begin{aligned}\frac{1-(1-\zeta)^m}{(1+y)(1+y(1-\zeta)^m)}&=\frac{1-u^m}{(1+y)(1+u^my)}\\&=(1-u^m)(\sum(-1)^iy^i)(\sum(-1)^ju^{mj}y^j)\\&=(1-u^m)\sum_{k\geq 9}(-1)^k(\sum_{j=0}^k u^{mj})y^k\\&=\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1-u^{m(k+1)})y^k\end{aligned}$$

以及

$$(1+uy)^{N+1} = \sum \binom{N+1}{j} u^j y^j$$

于是结合两者就有：

$$\sum f_{N,p}(\zeta)y^p = \frac{1}{u}(\sum_{k\geq 0}(-1)^k(1-u^{m(k+1)})y^k)(\sum_{j=0}^{N+1}\binom{N+1}{j}u^j y^j)$$

从而

$$f_{N,p}(\zeta) = \frac{1}{u}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{N+1}{p-k}(1-u^{m(k+1)})u^{p-k}$$

那么 χ^p 就是 $f_{N,p}(\zeta)$ 中 ζ^N 的系数。

例子. 现在考虑 $N=3$ 的情况，$T_i(f)$ 表示 f 展开中 ζ^i 的系数：

$$\begin{aligned}\chi^0(Z) = T_3(f_{3,0}) = T_3(\frac{1-u^m}{u}) = T_3(\frac{1}{1-\zeta} - (1-\zeta)^{m-1}) &= 1 + \binom{m-1}{3} \\ &= 1 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi^1(Z) = T_3(f_{3,1}) &= T_3(4(1-u^m) - \frac{1-u^{2m}}{u}) \\ = T_3(4(1-(1-\zeta))^m) + T_3((1-\zeta)^{2m-1}) &- T_3(\frac{1}{1-\zeta}) \\ &= 4\binom{m}{3} - \binom{2m-1}{3} - 1 \\ &= -\frac{-2m^3+6m^2-7m}{3}\end{aligned}$$

现在 $h^{0,2}(Z)+1 = \chi^0(Z)$，因此 $h^{0,2} = \dfrac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}$。

现在 $-h^{1,1}(Z) = \chi^1(Z)$，因此 $h^{1,1} = \dfrac{2m^3-6m^2+7m}{3}$。

10.4 $(1,1)$-类的 Lefschetz 定理

定理 10.4.1 (射影簇上的线丛都由除子给出). 对于子流形 $M \subseteq \mathbb{C}P^N$，其上每个线丛都是某个除子的对应。即：$\forall L, \exists D s.t. L = [D]$。

证明. 这只需说明每个全纯线丛 L 都有非恒零的亚纯截面。首先记 H 为超平面线丛在 M 上的拉回，考虑线丛 $L+\mu H$（$L\otimes H^\mu$）：我们将要用消没定理说明对于充分大的 μ 这个线丛有一个全纯截面 s。那么对于任何一个 H 的全纯界面 t，s/t^μ 就是 M 上的一个全局亚纯截面。

下面对 $n=\dim M$ 归纳：假设对于每个维数低于 n 的子流形 V 和其上的线丛 $L\to V$，都有 $H^0(V,\mathscr{O}(L+\mu H)) \neq 0, \mu >> 0$。

由 Bertini 定理，可以选出一个超平面 $\mathbb{C}P^{N-1}$，使得其与 M 的交是光滑的。那么考虑层正合列：

$$0 \to \mathscr{O}_M(L+(\mu-1)H) \to \mathscr{O}_M(L+\mu H) \to \mathscr{O}_V(L+\mu H) \to 0$$

由归纳假设，对充分大 $\mu >> 0$ 有 $H^0(V, \mathscr{O}(L+\mu H)) \neq 0$，以及渐近的 Kodaira 消没定理使得：

$$H^1(M, \mathscr{O}(L+(\mu-1)H)) = 0$$

，那么考虑层上同调长正合列，知：

$$H^0(M, \mathscr{O}(L+\mu H)) \to H^0(V, \mathscr{O}(L+\mu H)) \to 0$$

这就说明第一项一定非零，因此结果得证。 □

下面考虑紧 Kahler 流形 M，有 Hodge 分解 $H^n(M,\mathbb{C}) = \oplus_{p+q=n} H^{p,q}(M)$。限制到 $\mathbb{R}$ 系数上即有：

$$H^n(M,\mathbb{R}) = \oplus_{p+q=n, p\leq q}(H^{p,q}(M) \oplus H^{q,p}(M)) \cap H^n(M,\mathbb{R}))$$

我们希望对这个分解给出一个几何上的解释。

定义 10.4.2 (解析的同调类/上同调类)**.** 称同调类 $H_{2p}(M,\mathbb{Z})$ 是解析的，如果它是若干解析簇的基本类的 $\mathbb{Q}-$ 线性组合。对偶地，称上同调类是解析的如果它的 Poincare 对偶是解析的。

对于任何微分形式 ψ 和 p 维解析子簇：

$$\int_V \psi = \int \psi^{n-p,n-p}$$

于是对于一个上同调类 η_V，设其调和代表元为 η，那么对于任何调和形式 ψ，有：

$$\int_M \psi \wedge \eta = \int_V \psi = \int_V \psi^{n-p,n-p} = \int_M \psi \wedge \eta^{p,p}$$

于是 $\eta = \eta^{p,p}$。从而任何解析的 $2p$ 阶上同调类都是 (p,p) 型的。

命题 10.4.3 (Hodge 猜想)**.** *对于 $\mathbb{C}P^N$ 的子流形 M，每个 (p,p) 型的有理上同调类 ($H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M,\mathbb{Q})$) 都是解析的上同调类。*

注记. 这里需要对一些记号进行说明：首先 $H^{p,q}(M)$ 是指包含 (p,q) 代表元的 de Rham 上同调类。这里交的意思则是将 $\mathbb{Q}-$ 系数的奇异上同调嵌入 $\mathbb{R}$ 系数者当中，再利用 de Rham 定理变为 de Rham 上同调。

对于一般的 Hodge 猜想仍然没有得到解决，但是 $p=1$ 的情况是已知的：

定理 10.4.4. *对于 $\mathbb{C}P^N$ 的子流形 M，每个上同调类 $\gamma \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M,\mathbb{Z})$ 都是解析的。事实上它一定满足 $\exists D$，使得 $\gamma = \eta_D$。*

和前文注记同样的原因，这里将 $H^2(M,\mathbb{Z})$ 视作其在 $H^2(M,\mathbb{R})$ 中的嵌入像。

证明. 考虑层正合列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathscr{O} \to \mathscr{O}^* \to 0$。以及对应的层上同调长正合列：

$$H^1(M,\mathscr{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(M,\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H^2(M,\mathscr{O}) \overset{Compact\ Kahler}{\cong} H^{0,2}(M)$$

下面指出边缘映射 i_* 实际上是由如下图表给出的：

$$\begin{tikzcd}
H^2(M,\mathbb{Z}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d] & H^2(M,\mathscr{O}) \arrow[dd, "\cong", "Dolbeault"'] \\
H^2(M,\mathbb{C}) \arrow[d, "\cong", "de\ Rham"'] & \\
H^2_{dR}(M,\mathbb{C}) \arrow[r, "\pi^{0,2}"] & H^{0,2}_{\bar\partial}(M)
\end{tikzcd}$$

这只需要利用 Cech 上同调的表述进行一些计算即可说明，参见 [Har94, Page 164]。

下面，对于给定的 $\gamma \in H^{1,1}(M) \cap H^*(M,\mathbb{Z})$，有 $i_*(\gamma) = 0$：因为上表给出了 i_* 的分解中有一步 $\pi^{0,2}$，而 γ 在此映射下的像当然为 0. 因此由正合性知：$\gamma = c_1(L)$ 对某个 L 成立。于是结合 Chern 示性类的结论定理 9.3.13即得结论。 □

注记. 利用 Lefschetz 定理，知这也说明了 $2n-2$ 次的 Hodge 猜想。特别地，这说明了在射影空间的子流形中，除子和曲线的相交配对是非退化的。

第十一章 Kodaira 嵌入定理

11.1 复流形的嵌入

定理 11.1.1 (超平面丛的全纯截面). 存在 $\mathbb{C}$-线性空间的同构：

$$Sym^d(\mathbb{C}^{n+1*}) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(H^d))$$

特别地，上式左侧就是 d 次 $n+1$ 元齐次多项式。

证明. 由命题 9.2.6，$H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(H^d)) \cong \mathscr{L}(H^d)$，即全体在 H 上极点不超过 d 阶的亚纯函数。

现在我们取 $H = \{[z^0 : \cdots : z^n] | z^0 = 0\}$，我们来说明 $\mathbb{P}^n$ 上的亚纯函数都是有理函数。任取 $\mathscr{L}(H^d)$ 中的函数 f，以及任意一个 $\mathscr{L}(H^d)$ 中的有理函数 g，f/g 是 $\mathbb{P}^n$ 上的亚纯函数。

现在将 f/g 拉回到 $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ 上，记为 $h = \pi^*(f/g)$，那么 $z_0^d \cdot h$ 在 $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ 上全纯。由 Hartogs 定理，它可以延拓成为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 上的全纯函数。然而 $z_0^d \cdot h$ 满足是 d 次齐次的。因此由幂级数展开知它一定是 d 次齐次多项式。

因此这就说明了 $\mathscr{L}(H^d)$ 中的函数都是有理函数，从而具有形式 $\dfrac{P(z_0, \cdots, z_n)}{z_0^d}$，其中 P 是 d 次齐次多项式。

这就说明了 $H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(H^d))$ 等同于全体 d 次齐次多项式，进一步这就是 $Sym^d(\mathbb{C}^{n+1*})$ □

定理 11.1.2 (Chow 定理). 任何射影空间中的解析子簇（解析集）都是代数簇。

证明. 首先来看主解析集的情况，无妨假定 $V \subseteq \mathbb{P}^n$ 是一个不可约主解析集，那么 $[V]$ 形如超平面丛 H^d，因此 V 是丛 H^d 上一个截面的零点集。但是上一命题指出 H^d 上所有全纯截面都是代数的，这就说明了 V 也是代数的。

下面假定 $V \subseteq \mathbb{P}^n$ 是一般的 k-维解析子簇。对于任何 $p \in \mathbb{P}^n - V$，存在一个 $n-k-1$ 维射影子空间 $\mathbb{P}^{n-k-1}$ 使得它通过 p 并和 V 无交。进一步选取 $\mathbb{P}^{n-k-2} \subseteq \mathbb{P}^{n-k-1}$ 使得 p 不在其中。

现在取 π 为顺着 $\mathbb{P}^{n-k-2}$ 到正交补 $\mathbb{P}^{k+1}$ 的投影。选取好 $\mathbb{P}^n$ 的坐标使得：

$$\mathbb{P}^{n-k-2} = (z^0 = \cdots = z^{k+1} = 0)$$

$$\mathbb{P}^{k+1} = (z^{k+2} = \cdots = z^n = 0)$$

那么 $\pi(V)$ 由 Remmert's Proper Mapping Theorem 是一个解析集，进一步余维数为 1 于是是主解析集。

由假设 $\pi(p)$ 不在 $\pi(V)$ 中，于是对 $\pi(V)$ 主解析集的情况，存在一个齐次多项式 $F(z^0, \cdots, z^{k+1})$ 使得其在 $\pi(V)$ 上消失，但在 $\pi(p)$ 不消失。将其拉回，就得到了一个 V 上消失的多项式，但在 p 上不消失。

现在考虑全体 V 上消失的多项式构成的理想，那么这个理想的公共零点集恰好是 V。另一方面齐次多项式环是 Noetherian 的，因此这个理想有限生成，从而取出这有限个生成元就给出了结果。 $\square$

我们来给出研究紧复流形嵌入射影空间的基本思路。在紧复流形 M 上配备全纯线丛 $L \to M$，子空间 $E \leq H^0(M, \mathscr{O}(L))$ 给出了一个 linear system

$$|E| = \{(s)\}_{s \in E} \subseteq Div(M)$$

特别地，M 是紧的，因此 $|E| \cong \mathbb{P}(E)$。

现在如果 E 是无处消失的（即任何 $p \in M$，都存在截面 $s \in E$ 使得 $s(p) \neq 0$），那么对每个 $p \in M$，取一组 E 的基 $s_0, \cdots, s_{\dim E}$，那么

$$\iota_E : M \to \mathbb{P}^{\dim E} : p \mapsto [s_0(p), \cdots, s_N(p)]$$

是良定义的，并且 ι_E 是全纯的。

对于 $\mathbb{P}^N$ 上的超平面丛 H，考虑拉回从 $\iota_E^*(H)$，它是由除子 (s_i) 给出的。因此 $L = \iota_E^*(H)$。于是

$$E = \iota_E^*(H^0(\mathbb{P}^N, \mathscr{O}(H))) \subset H^0(M.\mathscr{O}(L))$$

特别地，如果 $|E|$ 是 complete linear system，那么这当且仅当

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(H)) \to H^0(V, \mathscr{O}(H))$$

是满的。

定义 11.1.3. 子流形 $V \subseteq \mathbb{P}^n$ 被称为正规的，如果嵌入 $V \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ 由一个 complete linear system。

命题 11.1.4. *每个主解析集 $V \subseteq \mathbb{P}^n$ 都是正规的。*

证明. 考虑层正合列

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(H - V) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(H) \to \mathscr{O}_V(H) \to 0$$

于是就有上同调群正合列

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(H)) \to H^0(V, \mathscr{O}_V(H)) \to H^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(H - V))$$

但是 $H^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}((1-d)H)) = 0$（假定 $[V] = H^d$）。因此前一映射是满的，从而说明 V 是正规的。 $\square$

定理 11.1.5. *射影空间 $\mathbb{P}^n$ 中两个维数 ≥ 3 的光滑主解析集（由 Chow 定理是射影的）如果是 d 次的，并且 $d \neq n+1$。那么它们是射影同构（即被射影空间的自同构转移）当且仅当它们同构。*

证明. 只需说明如果 V, V' 同构，则射影同构。事实上，如果双全纯自同构 $\varphi : V \to V'$ 将 $H|_{V'}$ 拉回到 $H|_V$，注意这个拉回映射配备上 $H|_V, H|_{V'}$ 给出的嵌入自然就给了 $\mathbb{P}^n$ 的自同构。

现在由 Adjunction Formula II.

$$K_V = (K_{\mathbb{P}^n} \otimes [V])|_V = [(d - n - 1)H]$$

现在由 Lefschetz 超平面定理：

$$H^i(V,\mathscr{O})\cong H^i(\mathbb{P}^n,\mathscr{O})=0\quad i=1,2$$

因此

$$Pic(V)=H^1(V,\mathscr{O}^*)\cong H^2(V,\mathbb{Z})\cong H^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$$

于是 $\varphi^*K_{V'}=K_V \implies \varphi^*(H|_{V'})=H|_V$，但是前者被 V,V' 的双全纯同构保证，因此这就说明了结果。 □

命题 11.1.6. 这一结对于 $\mathbb{P}^3$ 中的次数 $d\neq 4$ 的曲面也成立。

证明. 只需证明 $H^2(V,\mathbb{Z})$ 无挠。这是因为 $H_1(V,\mathbb{Z})=H^1(V,\mathbb{Z})=H^1(\mathbb{P}^3,\mathbb{Z})=0$。现在运用挠子群的 Poincare 对偶即可。 □

现在我们来看几个例子：

例子. 1. *Veronese* 映射：考虑 $\mathbb{P}^1$ 上的线丛 nH，那么其上的截面由 $n+1$ 个齐次单项式生成。因此在 $\mathbb{P}^1$ 上赋予坐标 $t=z_1/z_0$ 后，*linear system* 给出的嵌入是：

$$t\mapsto[1,t,\cdots,t^n]$$

它的像是 $\mathbb{P}^n$ 的一条 n 次曲线，称为 ***Rational Normal Curve***.

反过来，对于 n 次不可约的非退化曲线 $C\subseteq\mathbb{P}^n$，取出 $p_1,\cdots,p_{n-1}$ 为 C 上 $n-1$ 个线性无关的点，它们张出一个射影子空间 $V\cong\mathbb{P}^{n-2}$。取 $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{P}^1}$ 为全体包含 V 的射影超平面。每个超平面 H_λ 和 C 有 n 个交点。然而 $p_1,\cdots,p_{n-1}$ 已经是交点，于是仅剩一个额外的交点，记为 $q(\lambda)$。

并且反过来 C 上每一个点都和 $p_1,\cdots,p_{n-1}$ 唯一地张出了一个射影超平面，于是就有同构 $q:\mathbb{P}^1\to C$。进一步，我们注意到 $\mathbb{P}^n$ 上的超平面丛限制到 C 上也是超平面丛，而 $Pic(\mathbb{P}^i)=\mathbb{Z}$。于是仿照上一命题就说明了：

定理 11.1.7. $\mathbb{P}^n$ 中的 n 次不可约非退化曲线都射影同构于 *rational normal curve.*

2. *Veronese* 曲面：考虑 $\mathbb{P}^2$ 上的线丛 $2H$，那么 $\mathbb{P}^2$ 携带坐标 $s=z_1/z_0,t=z_2/z_0$ 后，*linear system* 给出的嵌入是：

$$(s,t)\mapsto[1,s,t,s^2,st,t^2]$$

11.2 爆破

定义 11.2.1 (爆破). 对于复流形 M 上一个局部坐标邻域 $\mathbb{C}^n$，注意 $\mathbb{C}^n-\{0\}\cong\mathscr{O}(-1)-\{zero\ section\}$，这里 $\mathscr{O}(-1)$ 是 $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上的自言线丛。

那么复流形 M 在点 x 处的爆破是指将 M 中 x 的邻域 $\mathbb{C}^n$ 替换为 $\mathscr{O}(-1)$（即保持 $\mathbb{C}^n-\{0\}$，将 $\{0\}$ 这一点替换为自言线丛的零截面 $\mathbb{C}P^{n-1}$。自然有投影映射 $\pi:\tilde{M}\to M$。

容易验证这是良好定义的（即邻域的选取不影响结果）。进一步，$\pi^{-1}(x)$ 对应的主解析集诱导的除子称为例外除子 (exceptional divisor)。

定理 11.2.2 (Castelnuovo-Enriques 判别). *M 是紧复曲面，$\tilde{M}$ 是 M 的爆破，例外除子是 E，那么 $[E]\cap[E](=<c_1([E]),[E]>)=-1$。*

反过来，对于一个紧复曲面 M'，如果 E 是一个满足 $E\cap E=-1$ 的除子，那么存在一个全纯函数 $\pi: M'\to M$ 使得 $\pi(E)=pt.$，使得 π 是一个爆破：这说明在紧复曲面上 $[E][E]=-1$ 恰好描述了 blow-up 和 blow-down。

我们现在来研究 blow-up 对复流形带来的影响：

命题 11.2.3. *如果 $\tilde{M}$ 是 M 在 x 处的 blow up，那么：*

$$K_{\tilde{M}}=\pi^*K_M+(n-1)E$$

证明. 在 E 的邻域外，$K_{\tilde{M}}=\pi^*K_M$。下面只需看 E 的邻域附近的情况。因此问题化归到证明对于 $\mathscr{O}(-1)\to\mathbb{C}^n$：

$$K_{\mathscr{O}(-1)}=\pi^*K_{\mathbb{C}^n}+(n-1)E$$

在 $\mathscr{O}(-1)$ 上有局部坐标 $\{((z^1,\cdots,z^n),(t^1,\cdots,t^n))\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{P}^{n-1}|z^it^j=z^jt^i\}$。在 $U_1=\{z^1\neq 0\}$ 上，取 $u_1^k=\dfrac{z^k}{z^1}$，那么 $(z^1,u_1^2,\cdots,u_1^n)$ 给出了一个局部坐标。

投影映射的作用是 $\pi:(z^1,u_1^2,\cdots,u_1^n)\mapsto(z^1,z^2,\cdots,z^n)=(z^1,z^1u_1^2,\cdots,z^1u_1^n)$。那么现在来看典范丛 $K_{\mathscr{O}(-1)}$：

$$\begin{aligned}dz^1\wedge du_1^2\wedge\cdots\wedge du_1^n&=dz^1\wedge d(\frac{z^2}{z^1})\wedge\cdots\wedge d(\frac{z^m}{z^1})\\&=\frac{dz^1\wedge\cdots\wedge dz^n}{(z^1)^{n-1}}\end{aligned}$$

这当然可以推广到任何 $U_i=\{z^i\neq 0\}$ 上，那么观察转移函数知这就给出了 $(n-1)E$。 □

11.3 Kodaira 嵌入定理

定义 11.3.1 (Polarization). 一个偶对 (M,L)，L 是紧 Kahler 流形 M 上的正线丛，称为一个极化流形。其中 L 称为一个极化。

定理 11.3.2 (Kodaira 嵌入). *给定紧 Kahler 流形 M 上的正线丛 L（即一个极化流形），存在一个 $k_0>0$ 使得 $\forall k\geq k_0$，存在一个嵌入*

$$\Phi_{L^{\otimes k}}:M\hookrightarrow\mathbb{C}P^N$$

其中 $N=\dim H^0(M,L^{\otimes k})-1$。

此时 $\Phi_{L^{\otimes k}}(p)=[s_0(p),s_1(p),\cdots,s_N(p)]\in\mathbb{C}P^N$ 给出了 $H^0(M,L^{\otimes k})$ 的一组基。

定义 11.3.3 (base point). $L\to M$ 是一个线丛，$s_0,\cdots,s_N\in H^0(M,L)$ 是一组基，那么 $p\in M$ 称为 base point，如果 $\forall i,s_i(p)=0$。（再一次地，Hodge 定理保证了维数的有限性）

因此 Kodaira 嵌入定理实际上说明对于正线丛和充分大的 k，$L^{\otimes k}$ 没有 base point。

定义 11.3.4 (semi-ample). 如果 (M, L) 没有 base point，那么线丛 L 称为是 semi-ample 的。即它只给出了一个 $L \to \mathbb{C}P^n$ 的映射（但不一定是嵌入）。

定义 11.3.5 (very ample). 称线丛 L 是 very ample 的，如果 L 自身可以嵌入到某个复射影空间中。

现在我们开始证明 Kodaira 嵌入定理。对于待定的正整数 k，考虑全体 $E :== L^{\otimes k}$ 的全局截面，Hodge 定理保证了它的维数是有限的。假定 $s_0, \cdots, s_{n_0}$ 是 $H^0(M, L^{\otimes k})$ 的一组基，那么定义

$$\eta : M \to \mathbb{P}^{n_0} : z \mapsto [s_0(z), \cdots, s_{n_0}(z)]$$

我们只需说明：

1. $\eta(z) \neq [0 : \cdots : 0]$
2. η 单
3. η 的切映射满秩

我们将这三个要求转化成如下问题：

1. 对于 M 上的任意两点 p, q，存在 k 使得映射

$$\begin{aligned} H^0(M, \mathscr{O}(L^{\otimes k})) &\to \mathscr{O}(L^{\otimes k})_p \oplus \mathscr{O}(L^{\otimes k})_q \\ s &\to (s(p), s(q)) \end{aligned}$$

   是满射

2. 对于 M 上的任意一点 p，存在 k 使得映射

$$\begin{aligned} H^0(M, \mathscr{O}(L^{\otimes k})) &\to \mathscr{O}(L^{\otimes k})_p / \mathscr{M}^2(L^{\otimes k})_p \\ s &\to (s \mod \mathscr{M}^2(L^{\otimes k})_p)(p) \end{aligned}$$

   是满射，其中 $\mathscr{M}(L^{\otimes k})_p$ 是指在 p 点值为 0 的亚纯截面的芽。

注意：连续性和 M 的紧性说明 k 的选取可以对 p, q 一致。

明显这里的第一条结果说明了 $\eta(z) \neq [0 : \cdots : 0]$ 以及 η 单；第二条结果说明了 η 的切映射满秩。

于是我们只需证明如下的一般结论：

命题 11.3.6. *M 是 n 维紧复流形，其上有正线丛 L。给定 M 上若干个点 $p_1, \cdots, p_N$ 和非负整数 m 后，存在正整数 k 使得*

$$H^0(M, \mathscr{O}(L^{\otimes k})) \to \bigoplus_{i=1}^{N} \mathscr{O}(L^{\otimes k})_{p_i} / \mathscr{M}^{m+1}(L^{\otimes k})_{p_i}$$

是满射。

引理 11.3.7. $\tilde{M}$ 是 n 维紧复流形 M 在 $\{p_1, \cdots, p_N\}$ 处爆破得到的流形，L 是 M 上的正线丛，那么对于任何非负整数 m，存在正整数 k 使得

$$H^1(\tilde{M}, \mathscr{O}(-mE \otimes \pi^* L^{\otimes k})) = 0$$

证明. 注意

$$H^1(\tilde{M}, \mathscr{O}(-mE \otimes \pi^* L^{\otimes k})) = H^1(\tilde{M}, \Omega^n(K_{\tilde{M}}^{-1} \otimes -mE \otimes \pi^* L^{\otimes k})) = H^{1,n}(\tilde{M}, K_{\tilde{M}}^{-1} \otimes -mE \otimes \pi^* L^{\otimes k})$$

那么由 Kodaira 消没定理，只需证明 $K_{\tilde{M}}^{-1} \otimes -mE \otimes \pi^* L^{\otimes k} = E^{\otimes 1-n-m} \otimes \pi^*(L^{\otimes k} \otimes K_M)$ 是正线丛。

现在由归纳，无妨假定 $N = 1$。

□

第十二章　复结构的形变

定义 12.0.1. 复解析结构族是指连通复流形之间的全纯映射 $\varpi : \mathscr{M} \to B$，满足：

1. ϖ 是逆紧的。
2. $M_t = \varpi^{-1}(t)$ 是 $\mathscr{M}$ 的紧子流形。
3. ϖ 是处处满秩（$\dim B$）的，从而诸 M_t 是微分同胚的。

它被视为 M_t 上的一族全纯变动的复结构。

首先固定 $0 \in B$，以及其在 B 中的局部坐标多圆盘域 $N = \{(t_1, \cdots, t_n) \| t_\lambda| < \varepsilon\}$，以及 $\varpi^{-1}(N)$ 的局部坐标多圆盘域：

$$\varpi^{-1}(N) = \cup_\alpha \mathfrak{U}_\alpha$$

其中每个 $\mathfrak{U}_\alpha = \{(z_\alpha, t) \| z_\alpha^i| < 1, t \in N\}$。现在我们来看 $\mathfrak{U}_\alpha, \mathfrak{U}_\beta$ 之间的转移函数：记为

$$z_\alpha^i = f_{\alpha\beta}^i(z_\beta, t)$$

那么 $f_{\alpha\beta}^i$ 关于 z_β, t 都是全纯的。这时纵向的切向量按照如下方式转移：

$$\frac{\partial}{\partial z_\beta^j} = \frac{\partial z_\alpha^i}{\partial z_\beta^j} \cdot \frac{\partial}{\partial z_\alpha^i} = \frac{\partial f_{\alpha\beta}^i}{\partial z_\beta^j} \cdot \frac{\partial}{\partial z_\alpha^i}$$

Slogan (Kodaira-Spencer). 复结构的形变被 $\dfrac{\partial f_{\alpha\beta}^i}{\partial t}(z_\beta, t)$ 描述。

定义 12.0.2. 现在我们只考虑 t 在一个分量 t_λ 上的变动，定义：

$$\mathscr{O}_{\alpha\beta}(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_{\alpha\beta}^i(z_\beta, t)}{\partial t_\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial z_\alpha^i}$$

再取切层 $\Theta = \mathscr{O}(T'M)$，以及在纵方向的限制 $\Theta_t = \mathscr{O}(T'M_t)$，那么 $\mathscr{O}_{\alpha\beta}$ 是一个 Θ_t 的 Cech 上链。

引理 12.0.3. $\{\mathscr{O}_{\alpha\beta}\}$ 是上圈。

证明. 这只需说明

$$\mathscr{O}_{\alpha\beta} + \mathscr{O}_{\beta\gamma} + \mathscr{O}_{\gamma\alpha} = 0$$

以及

$$\mathscr{O}_{\beta\alpha} = -\mathscr{O}_{\alpha\beta}$$

利用切向量的转移函数展开即可：

$$f^i_{\alpha\gamma}(z_\gamma,t)=z^i_\alpha=f^i_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(z_\gamma,t),t)$$

于是

$$\begin{aligned}\mathscr{O}_{\alpha\gamma}&=\frac{f^i_{\alpha\gamma}(z_\gamma,t)}{\partial t_\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial z^i_\alpha}\\&=\frac{\partial f^i_{\alpha\beta}}{\partial t_\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial z^i_\alpha}+\frac{\partial f^i_{\alpha\beta}}{\partial z_\beta}\cdot\frac{\partial f_{\beta\gamma}}{\partial t_\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial z^i_\alpha}\\&=\mathscr{O}_{\alpha\beta}+\mathscr{O}_{\beta\gamma}\end{aligned}$$

另一方面：

$$f^i_{\alpha\beta}(f_{\beta\alpha}(z_\alpha,t),t)=1$$

于是两侧对 t_λ 求导：

$$\mathscr{O}_{\alpha\beta}+\frac{\partial f^i_{\alpha\beta}}{\partial z_\beta}\cdot\frac{\partial f_{\beta\alpha}}{\partial t_\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial z^i_\alpha}=0$$

从而 $\mathscr{O}_{\alpha\beta}+\mathscr{O}_{\beta\alpha}=0$。

□

定义 12.0.4 (无穷小形变). 定义 $[\{\mathscr{O}_{\alpha\beta}(t)\}]\in H^1(M_t,\Theta_t)$ 为复结构在 M_t 处的无穷小形变，记为 $\frac{\partial M_t}{\partial t_\lambda}$（前文中是在 t_λ 方向上的形变。

对于一般的 t，如果 $\frac{\partial}{\partial t}=\sum c_\lambda\frac{\partial}{\partial t_\lambda}$，定义：$\frac{\partial M_t}{\partial t}=\sum c_\lambda\frac{\partial M_t}{\partial t_\lambda}\in H^1(M_t,\Theta_t)$（这是自然的，在前文定义中将 t_λ 换成一般的 t 即可。

命题 12.0.5. *$\frac{\partial M_t}{\partial t}$ 和开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 以及纵向坐标 z^i_α 的选取无关。*

证明. 对于两组坐标：

$$z^i_\alpha=f^i_{\alpha\beta}(z_\beta,t);\quad w^i_\alpha=g^i_{\alpha\beta}(w_\beta,t)$$

$$\theta_{\alpha\beta}=\frac{\partial f^i_{\alpha\beta}}{\partial t_\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial z^i_\alpha};\quad \hat\theta_{\alpha\beta}=\frac{\partial g^i_{\alpha\beta}}{\partial t_\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial w^i_\alpha}$$

$$h^i_\alpha(g_{\alpha\beta}(w_\beta,t),t)=h^i_\alpha(w_\alpha,t)=z^i_\alpha=f^i_{\alpha\beta}(z_\beta,t)=f^i_{\alpha\beta}(h_\beta(w_\beta,t),t)$$

那么两侧对 t_λ 求导：

$$\frac{\partial f^i_{\alpha\beta}}{\partial t_\lambda}+\cdot\frac{\partial z^i_\alpha}{\partial z_\beta}\cdot\frac{\partial h^i_\beta}{\partial t_\lambda}=\frac{\partial h^i_\alpha}{\partial t_\lambda}+\frac{\partial h^i_\alpha}{\partial w^i_\alpha}\cdot\frac{g_{\alpha\beta}}{\partial t_\lambda}$$

即：

$$\theta_{\alpha\beta}+\frac{\partial h^j_\beta}{\partial t_\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial z^j_\beta}=\hat\theta_{\alpha\beta}+\frac{\partial h^i_\alpha}{\partial t_\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial z^j_\alpha}$$

因此取 $\eta_\alpha=\frac{\partial h^i_\alpha}{\partial t_\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial z^i_\alpha}$，而：

$$\theta_{\alpha\beta}-\theta_{\alpha\beta}=\delta(\{\eta_\alpha\})$$

这就说明了 $[\theta]=[\hat\theta]$。

□

定义 12.0.6 (无穷小形变的上同调定义: Kodaira-Spencer 映射). 固定一个点 t，我们有短正合列

$$0 \to \mathscr{O}(TM_t) \to T\mathscr{M}|_{M_t} \to T_tB \otimes \mathscr{O}_M \to 0$$

那么取长正合列就有

$$KS : \Gamma(T_tB \otimes \mathscr{O}_M) \to H^1(M_t, TM_t)$$

特别地，前述构造的无穷小形变是从 $\Gamma(T_0B)$ 出发的。

Kodaira-Spencer 理论的主结果如下：

定理 12.0.7 (Kodaira-Spencer, Kuranishi). *对于紧复流形 M，如果 $H^2(M, TM) = 0$，那么对于任何 $H^1(M, TM)$，它都能够被某个形变实现。*

更一般地，存在一个自然的阻碍映射：

$$\psi : H^1(M, TM) \to H^2(M, TM)$$

使得 $\psi^{-1}(0)$ 恰好是全体形变在 KS 映射下的像。

主要证明思路如下：

命题 12.0.8. *存在 $\varphi(t) \in \mathscr{A}^{0,1}(T'M)$ 使得：*

1. *f 关于 $\bar{\partial}_t$ 是全纯的 $\iff \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}^\alpha} - \varphi_{\bar{\alpha}}^{\beta} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial z^\beta} = 0$*
2. *$\varphi(0) = 0$*
3. *$\bar{\partial}\varphi(t) - \dfrac{1}{2}[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$*
4. *$\dot{\varphi}(t) = \eta$，这里 η 是 $\psi^{-1}(0)$ 中的元素对应的调和 1 形式。*

前三条决定了一个复结构形变：Newlander-Nirenberg 定理（第一条说明近复结构，第三条说明可积性）。

第三部分

Riemann 面

第十三章 绪论

13.1 Riemann 面的嵌入

命题 13.1.1. 紧 *Riemann* 面 S 总可嵌入到射影空间中。

证明. 注意 S 是 1 维的，因此任取其上一个线丛 L 对应的曲率，它要么是负定的（这时考虑对偶丛），要么是正定的，因此 Kodaira 嵌入定理就说明了结果。 □

我们来给出一些更精细的结果，总假定 S 是紧 Riemann 面。

定理 13.1.2 (紧 Riemann 面嵌入定理). 对于任何 S 上的线丛 $L \to S$，有

1. $\deg L < 0 \implies H^0(S, \mathscr{O}(L)) = 0$
2. $\deg L > \deg K_S \implies H^1(S, \mathscr{O}(L)) = 0$
3. $\deg L > \deg K_S + 2 \implies \iota_L : S \to \mathbb{P}^n$ 是良定义的嵌入

这里 $\deg L$ 是将 $c_1(L) \in H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 等同于一个整数。特别地，它和除子的次数的定义是相同的。

证明. 1. L 有非平凡全纯截面 $\iff$ L 是某个有效除子给出的，因此 $\deg L \geq 0$。

2. L 是正线丛 $\iff$ $\deg L > 0$，于是 $\deg L > \deg K_S \implies L \otimes K_S^*$ 是正线丛，于是

$$H^1(S, \mathscr{O}(L)) = H^{1,1}(S, L \otimes K_S^*) = 0$$

3. 为了说明这的确是嵌入，仿照 Kodaira 嵌入定理，只需说明

$$H^0(M, \mathscr{O}(L)) \to \mathscr{O}(L)_p \oplus \mathscr{O}(L)_q$$

$$H^0(M, \mathscr{O}(L)) \to \mathscr{O}(L)_p / \mathscr{M}^2(L)_p$$

是满射。但是注意层正合列

$$0 \to \mathscr{O}(L - p - q) \to \mathscr{O}(L) \to \mathscr{O}(L)_p \oplus \mathscr{O}(L)_q \to 0$$

$$0 \to \mathscr{O}(L - 2p) \to \mathscr{O}(L) \to \mathscr{O}(L)_p / \mathscr{M}^2(L)_p$$

给出的长正合列，以及消没定理给出的

$$H^1(S, \mathscr{O}(L - p - q)) = H^1(S, \mathscr{O}(L - 2p)) = 0$$

那么这就说明了结果。

□

定义 13.1.3 (Secant Variety). $\mathbb{P}^n$ 中的 d 维簇 X 的 secant variety 定义为 $Sec(X) := \cup_{p,q\in X}\overline{pq}$。

命题 13.1.4. $\dim Sec(X) \leq 2d+1$

证明. $Sec(X)$ 被 $X \times X \times \mathbb{P}^1$ 参数化。 $\square$

命题 13.1.5. *每个紧 Riemann 面 S 都可嵌入到 $\mathbb{P}^3$ 中。*

证明. 前文讨论说明 S 是射影簇，设其被嵌入到 $\mathbb{P}^n, n \geq 4$ 中。于是考虑它的 Secant Variety：$\dim Sec(S) \leq 3$。于是存在 $p \in \mathbb{P}^n - Sec(S)$，现在从 p 向一个低一维的射影超平面 $\mathbb{P}^{n-1}$ 投影给出了 $S \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ 的嵌入。这一操作在 $n=3$ 时终止。 $\square$

13.2 Riemann-Hurwitz 公式、次数-亏格公式

定义 13.2.1. 对于紧 Riemann 面 X, Y 之间的非常值全纯映射 $f : X \to Y$。任意 $p \in X$ 和 $q := f(p) \in Y$，局部上有坐标卡使得其具有形式 $w = z^d$。定义 $d = v_p(f)$ 为 f 在 p 处的分歧指数。

例子. *$p=1$ 时 f 局部上是微分同胚；$p>1$ 上局部是 $(v_p(f)-1)$-分歧覆叠。*

注记. 使得 $v_p(f) > 1$ 的 p 构成的点集是离散的。

定理 13.2.2 (Riemann-Hurwitz 公式). *对于紧 Riemann 面 X, Y 之间的非常值全纯映射 $f : X \to Y$：*

$$K_X = f^*K_Y \otimes [B_f]$$

其中 B_f 是除子 $\sum_{p\in X}(v_p(f)-1)\cdot p$。

证明. 由于紧 Riemann 面都是射影的，由定理 10.4.1，其上线丛都由吹给出。因此我们来看 Y 上的一个非零亚纯 $(1,0)$-形式 ω，局部上形如 $\frac{g(w)}{h(w)}dw$。那么在 $w = z^d$ 的拉回下：

$$f^*\omega = \frac{g(z^d)}{h(z^d)}(d\cdot z^{d-1})dz$$

于是 $v_p(f^*\omega) = d\cdot v_p(\omega) + (d-1)$，两侧同乘 p，就说明：

$$(f^*\omega) = f^*(\omega) + B_f$$

（回忆 (s) 是指亚纯截面 s 对应的除子）因此

$$K_X = f^*K_Y \otimes [B_f]$$

$\square$

推论 13.2.3.

$$2g_X - 2 = \deg f\cdot(2g_Y-2) + b_f$$

其中 $b_f = \sum_{p\in X}(v_p(f)-1)$，$\deg f$ 是 f 的映射度。

注意，$\deg f = \sum_{p\in f^{-1}(q)} v_f(p)$。

证明. 在 Riemann-Hurwitz 两侧取第一 Chern 类，注意此时它们都是 Euler 类。 □

注记. $\deg f = 1$ 说明 $f^{-1}(q)$ 有且仅有一个点，于是是全纯同构。

定理 13.2.4 (次数-亏格公式). $\mathbb{C}P^2$ 中的 n 次光滑代数曲线的亏格是

$$g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

引理 13.2.5. *$X \subseteq \mathbb{C}P^2$ 是光滑 n 次代数曲线，那么法丛 N 同构于 $\mathscr{O}(n)|_X$。*

证明. 由 Adjunction Formula，$N \cong [X]|_X$。但是 $[X] \cong \mathscr{O}(n)$，因为它和 nH（n 倍超平面除子）线性等价：考虑除以 z_0^n 即可。 □

定理 13.2.4的证明.

$$T\mathbb{C}P^2|_X = TX \oplus \mathscr{O}(n)|_X$$

那么取全 Chern 类：

$$\begin{aligned} c(TX) &= \frac{c(T\mathbb{C}P^2|_X)}{c(\mathscr{O}(n)|_X)} = \frac{(1+x)^3}{1+nx} \\ &= (1+3x)(1-nx) = 1 + (3-n)x \end{aligned}$$

x 是 $H^2(\mathbb{C}P^2)$ 的生成元在 $H^2(X)$ 中的限制。现在 $< x, [X] >= n$：因为这是 X 和 x 的 Poincare 对偶（一条直线）的相交数。

现在由 Poincare-Hopf 定理：$\chi(X) =< e(TX), [X] >= (3-n)n$，但是 $\chi(X) = 2-2g$，这就证明了结果。 □

13.3 $g = 0, 1$ 的紧 Riemann 面

定理 13.3.1. *亏格为 0 的紧 Riemann 面同构于 $\mathbb{P}^1$。*

证明. 对于任何一点 $p \in S$，考虑 $L = [p]$。有短正合列：

$$0 \to \mathscr{O}_S(L \otimes [-p]) \to \mathscr{O}_S(L) \to \mathscr{O}_p(L) \to 0$$

（定义 9.2.7）第一项正是 $\mathscr{O}_S$，然而注意 $H^1(S, \mathbb{C}) = 0$，于是 $H^{1,0}(S) = 0$，从而 $H^1(S, \mathscr{O}_S) = H^1(S, \Omega^0) = 0$。

因此观察上述短正合列的长正合列知：$H^0(S, \mathscr{O}_S(L)) \to H^0(S, \mathscr{O}_p(L))$ 是满射。于是 L 存在一个在 p 非零的整体截面。考虑其对应的亚纯函数 f：它在非 p 处全纯，在 p 处有一个 1 阶极点。这给出了一个 $f: S \to \mathbb{P}^1$ 的全纯映射。

由于除子 (f) 的次数是 0，它一定形如 $(P) - (Q)$，$Q \neq P$。现在紧 Riemann 面之间的全纯映射一定是若干分歧覆叠，于是 f 的映射度是 1（观察 ∞ 的原像）. 这就说明了 f 给出了 $S \to \mathbb{P}^1$ 的全纯同构。 □

定理 13.3.2. *任何亏格为 1 的紧 Riemann 面都同构于 $\mathbb{P}^2$ 中的一条非奇异三次曲线。*

证明. $g=1$ 时 $\deg K_S=-c_1(S)=2g-2=0$，那么定理 13.1.2说明：$L=[3p]$ 给出了一个 $S\to\mathbb{P}^n$ 的嵌入，其嵌入像被 3 次齐次多项式描述。

现在 $n=\dim H^0(S,\mathscr{O}(L))-1\geq 2$，这是自动成立的。然而 $\dim H^0(S,\mathscr{O}(L))\leq 3$，因为它等同于在 p 处极点阶不超 3 的亚纯函数。

然而这样的函数唯一地被在 p 局部的展开 $\frac{a_{-3}}{z^3}+\cdots+a_0+\cdots$ 决定。我们来进一步说明这样的函数唯一地被 a_{-3},a_{-2},a_0 决定：假设一组 (a_{-3},a_{-2},a_0) 给出了两个不同的亚纯函数，那么它们的差是一个在 p 有 1 阶极点的亚纯函数。上一个定理的证明说明了这样的亚纯函数给出了全纯同构 $S\to\mathbb{P}^1$，矛盾！

因此 $\dim H^0(S,\mathscr{O}(L))\leq 3$，综上 $n=2$。 □

我们还有更精细的对这个嵌入的描述。

引理 13.3.3 (紧 Riemann 面上 1-形式的留数定理). *对于紧 Riemann 面 S 上的亚纯 1-形式 φ，其极点除子是 $a_1+\cdots+a_d$，那么*

$$\sum_i Res_{a_i}(\varphi)=0$$

证明.

$$0=-\int_{S-\cup_i B_\varepsilon(a_i)}d\varphi=\int_{\partial\cup_i B_\varepsilon(a_i)}\varphi=\sum_i Res_{a_i}(\varphi)$$

□

定理 13.3.4. *任何亏格为 1 的紧 Riemann 面 S 都同构于 $\mathbb{P}^2$ 中*

$$y^2=x\cdot(x-1)\cdot(x-\lambda)$$

决定的零点集，$\lambda\in\mathbb{C}$。

证明. 由 Kodaira 消没定理：$H^1(S,\mathscr{O}([p]))=0$；以及前文论述的 $H^0(S,\mathscr{O}(p))=0$（它等价于仅在 p 上有一个极点的亚纯函数）

另一方面我们有短正合列：$0\to\mathscr{O}_S([2p]\otimes[-p])\to\mathscr{O}_S([2p])\to\mathscr{O}_p([2p])\to 0$（定义 9.2.7）。于是考虑长正合列知

$$H^0(S,\mathscr{O}_S(2p))\to H^0(S,\mathscr{O}_p(2p))$$

是同构。因此存在一个亚纯函数 F 在 p 上有 2 重极点，其余处全纯。

现在 $\dim H^0(S,\Omega^1)=\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{2}(b_0+b_2-\chi(S))=1$，于是 S 存在非零 1-形式 ω。然而 $0=\deg K_S=\deg(\omega)$，于是 ω 一定处处非零。

现在考虑亚纯形式 $F\cdot\omega$：它在 $S-\{p\}$ 上全纯，那么由紧 Riemann 面上 1-形式的留数定理：$Res_p(F\cdot\omega)=0$。于是在 p 点处 F 局部可以写为 $F(z)=\frac{1}{z^2}+[1]$。

现在来看亚纯形式 dF/ω（注意紧 Riemann 面上的全纯 1-形式可以做除法：$fdz/gdz=f/g$），由于 ω 处处非零，dF/ω 在 $S-\{p\}$ 上全纯，那么再一次由紧 Riemann 面上 1-形式的留数定理，dF/ω 的 -1 次项消失。于是取

$$F'=\lambda\frac{dF}{\omega}+\lambda' F+\lambda''$$

可使

$$F' = \frac{1}{z^3} + [1]$$

观察极点知 $1, F, F'$ 线性无关，于是现在 $[1, F, F']$ 给出了一个 $\iota_{[3p]} : S \to \mathbb{P}^2$。在 p 处局部展开，有：

$$F'^2 = \frac{1}{z^6} + \frac{c}{z^2} + [-1]$$

$$F^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{c'}{z^3} + \frac{c''}{z^2} + [-1]$$

因此 $F'^2 + c'F' - F^3 + (c'' - c)F$ 在 $S - \{p\}$ 上是全纯的，于是（再一次由仅一个极点的亚纯函数不存在）是全纯函数，从而常值。因此 S 在 $\iota_{[3p]}$ 下的嵌入像满足：

$$y^2 + c'y = x^3 + ax + b$$

适当的线性变换就给出了结果。 $\square$

第十四章　Abel 定理

14.1　Abel 第一定理

我们来看形式 $\omega = dx/y$ 在曲线 $C = (y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c)$ 上的积分。注意 C 拓扑同胚于环面，于是考虑 $H^1(C, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的两个生成元 γ_1, γ_2。

取 $a_1 = \int_{\gamma_1} \omega, a_2 = \int_{\gamma_2} \omega$，它们称为 ω 的周期。

命题 14.1.1. *ω 的周期是 $\mathbb{R}$-线性无关的，从而 $\Lambda = \mathbb{Z}a_1 \oplus \mathbb{Z}a_2$ 是格。*

证明. 如果 $k_1 \int_{\gamma_1} \omega + k_2 \int_{\gamma_2} \omega = 0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$，那么取共轭就有 $k_1 \int_{\gamma_1} \bar{\omega} + k_2 \int_{\gamma_2} \bar{\omega} = 0$

然而 $\omega, \bar{\omega}$ 是 $H^{1,0}(C), H^{0,1}(C)$ 的生成元，它们生成了 $H^1_{dR}(C)$，因此这说明在 $H_1(C, \mathbb{R})$ 中 $k_1[\gamma_1] + k_2[\gamma_2] = 0$，但这由 γ_i 的选取是不可能的。 □

注记. 现在我们要求积分 $\int_{p_0}^{p} \omega$ 取值在复环面 $\mathbb{C}/\Lambda$ 中。

定义 14.1.2 (Abel 和). 对于 $\mathbb{P}^2$ 中的射影直线 $L \subseteq \mathbb{P}^2$，$p_1(L), p_2(L), p_3(L)$ 为 L 和 C 的三个交点。那么定义 Abel 和为

$$\psi(L) = \sum_{i=1}^{3} \int_{p_0}^{p_i} \omega$$

定理 14.1.3 (Abel 第一定理). *$\psi(L)$ 是常值。*

证明. ψ 给出了一个映射 $\mathbb{P}^{2^*} \to \mathbb{C}/\Lambda$（前者是 $\mathbb{P}^2$ 中的全体直线，它是 $\mathbb{P}^2$）。它是全纯的，取 z 为 $\mathbb{C}/\Lambda$ 的 Euclidean 坐标，由于 $H^{1,0}(\mathbb{P}^2) = H^0(\mathbb{P}^2, \Omega^1) = 0$，有：

$$\psi^* dz = 0$$

因此 ψ 是常值。 □

定理 14.1.4 (Abel 第一定理). *对于亏格为 1 的曲线 C，以及 $\omega \in H^0(C, \Omega^1)$ 是全纯 1-形式，$\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ 是 ω 的周期格。设 $D = (f) = \sum p_i - \sum q_i$ 是亚纯函数对应的除子，那么：*

$$\sum_i \int_{q_i}^{p_i} \omega = 0$$

证明. 取

$$D_\lambda = (\lambda_0 f - \lambda_1) = \sum p_i(\lambda) - \sum q_i(\lambda), \lambda = [\lambda_0, \lambda_1] \in \mathbb{P}^1$$

记

$$\psi(\lambda) = \sum_i \int_{q_i(\lambda)}^{p_i(\lambda)} \omega$$

于是 $\psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}/\Lambda$ 是一个全纯映射。然而再一次地 $H^{1,0}(\mathbb{P}^1) = H^0(\mathbb{P}^1, \Omega^1_{\mathbb{P}^1}) = 0$，于是再一次地：$\psi^* dz = 0$，从而 ψ 是常值。

现在令 $\lambda_0 \to 0$，$\psi(\lambda) = 0$，于是这就说明了 $\psi = 0$。 □

14.2 第一互反律

定义 14.2.1 (典范基). 对于亏格为 g 的紧 Riemann 面 S，$\delta_1, \cdots, \delta_{2g}$ 是 $H_1(X, \mathbb{Z})$ 的一组基。称这组基是典范的，如果 $[\delta_i] \cap [\delta_{i+g}] = 1, [\delta_i] \cap [\delta_j] = 0, j \neq i, i+g$。

此时称 $\delta_1, \cdots, \delta_g$ 为 A-圈；$\delta_{g+1}, \cdots, \delta_{2g}$ 为 B-圈。

定义 14.2.2 (Jacobian 簇). 取 $\omega_1, \cdots, \omega_g \in H^0(S, \Omega^1)$ 是全纯 1-形式的一组基，其周期矩阵定义为：

$$\Omega = \begin{pmatrix} \int_{\delta_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\delta_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\delta_1} \omega_g & \cdots & \int_{\delta_{2g}} \omega_g \end{pmatrix}$$

每个列向量

$$\Pi_i = \begin{pmatrix} \int_{\delta_i} \omega_1 & \cdots & \int_{\delta_i} \omega_g \end{pmatrix}^T$$

称为 δ_i 的周期。再一次地，它们是 $\mathbb{R}$-线性无关的，因此 $\Pi_i \in \mathbb{C}^g$ 张出了一个格 Λ。

定义 $\mathbb{C}^g/\Lambda$ 为 S 的 Jacobian 簇 $\mathscr{J}(S)$。

定义 14.2.3 (Abel-Jacobi 映射). $Div^0(S)$ 是全体 0 次除子构成的群。那么定义

$$\mu : Div^0(S) \to \mathscr{J}(S)$$

$$\sum p_\lambda - \sum q_\lambda \mapsto (\sum_\lambda \int_{q_\lambda}^{p_\lambda} \omega_1, \cdots, \sum_\lambda \int_{q_\lambda}^{p_\lambda} \omega_g)$$

Riemann 面研究的一个主要课题就是研究映射 μ，首先我们给出一个重要结果。

考虑 g-亏格环面的标准 CW 复形表示：一个 $4g$ 边的多边形，按照 $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ 商去。那么 $a_1, \cdots, a_g; b_1, \cdots, b_g$ 自然是一组 A-圈和 B-圈。接下来，我们始终取定这一组典范基，记为 $\delta_1, \cdots, \delta_g; \delta_{g+1}, \cdots, \delta_{2g}$，记这些圈的共同起点为 s_0

定理 14.2.4 (第一互反律). *对于 S 上的全纯 1-形式 ω；亚纯 1-形式 η 使得其在诸 δ_i 上没有极点，并且极点都是 1 阶的；设 Π^i, N^i 分别为 ω, η 在 δ_i 上的周期（即在其上的积分）。则：*

$$\sum_{i=1}^{g} (\Pi^i N^{g+i} - \Pi^{g+i} N^i) = 2\pi\sqrt{-1} \sum_\lambda Res_{s_\lambda}(\eta) \cdot \int_{s_0}^{s_\lambda} \omega$$

其中 s_0 为诸圈 δ_i 的共同基点，s_λ 为 η 的诸极点，右侧积分不越过诸 δ_i，即在多边形 Δ 内部的一条路径上积分。

证明. 定义 $\pi(s) = \int_{s_0}^{s} \omega$（再一次地积分路径在多边形 Δ 内部）。因此 π 是一个 $\bar{\Delta}$ 上的全纯函数，并且 $\omega = d\pi$。

对于 δ_i, δ_i^{-1} 上在 S 中被粘合的两点 p, p'：

$$\pi(p') - \pi(p) = \int_p^{p'} \omega = \int_{\delta_{g+i}} \omega = \Pi^{g+i}$$

（倒数第二个等号源于将积分路径取为 $p \to s_0 \xrightarrow{\delta_{g+i}} s_0 \to p'$ ）

同理，对于 $\delta_{g+i}, \delta_{g+i}^{-1}$ 上在 S 中被粘合的两点 p, p'：$\pi(p') - \pi(p) = -\Pi^i$。

现在来看多边形 Δ 上的亚纯 1-形式 $\pi \cdot \eta$，由留数定理：

$$\int_{\partial\Delta} \pi \cdot \eta = 2\pi\sqrt{-1}\sum_{\lambda} Res_{s_\lambda}(\pi \cdot \eta) = 2\pi\sqrt{-1}\sum_{\lambda} Res_{s_\lambda}(\eta) \cdot \pi(s_\lambda)$$

$$= 2\pi\sqrt{-1}\sum_{\lambda} Res_{s_\lambda}(\eta) \cdot \int_{s_0}^{s_\lambda} \omega$$

另一方面：

$$\int_{\delta_i + \delta_i^{-1}} \pi \cdot \eta = \int_{\delta_i} (\pi(p) - \pi(p')) \cdot \eta = -\Pi^{g+i} \cdot \int_{\delta_i} \eta = -\Pi^{g+i} \cdot N^i$$

同理

$$\int_{\delta_{g+i} + \delta_{g+i}^{-1}} \pi \cdot \eta = \Pi^i \cdot N^{g+i}$$

于是这两式相加和留数定理给出的结果进行比较就说明了结果。 □

推论 14.2.5. *对于两个全纯 1-形式 ω, ω'，其周期分别为 Π^i, Π'^i，那么：*

$$\int_S \omega \wedge \bar{\omega}' = \sum_i (\Pi^i \cdot \overline{\Pi'^{i+g}} - \Pi^{i+g} \cdot \overline{\Pi'^i})$$

特别地，取 $\omega' = \omega$ 时就得到：如果 ω 满足其在 A-圈上的周期都消失，那么 ω 是 0。

于是 Ω 的前 $g \times g$ 子式是非奇异的。因此可以选出一组标准的 $H^0(S, \Omega^1)$ 的基使得：$\int_{\delta_i} \omega_j = \delta_{ij}, 1 \le i, j \le g$。此时周期矩阵 Ω 形如 (I_g, Z)，称这样的基为规范基。

证明. 这只需注意 $d(\pi \cdot \bar{\omega}') = d\pi \wedge \bar{\omega}' = \omega \wedge \bar{\omega}'$。 □

推论 14.2.6 (第一 Riemann 双线性关系). *第一互反律中取 η 为全纯 1-形式 ω'，那么：*

$$\sum_{i=1}^{g} (\Pi^i \Pi'^{g+i} - \Pi^{g+i} \Pi'^i) = 0$$

特别地，对于规范基 ω_i, ω_j：

$$\int_{\delta_{g+i}} \omega_j = \int_{\delta_{g+j}} \omega_i$$

推论 14.2.7 (第二 Riemann 双线性关系). *由于规范基 ω_i 上的内积给出了正定的 Gram 矩阵 $((\omega_i, \omega_j))_{ij}$，而：*

$$(\omega_i, \omega_j) = \sqrt{-1}\int_S \omega_i \wedge \bar{\omega}_j = \sqrt{-1}\overline{\int_{\delta_{g+i}\omega_j}} - \sqrt{-1}\int_{\delta_{g+j}} \omega_i$$

$$= 2 \cdot \operatorname{Im} \int_{\delta_{g+i}} \omega_j$$

推论 14.2.8. *对于 $H^0(S, \Omega^1)$，其周期矩阵 $\Omega = (I_g, Z)$，Z 是对称的并且 $\operatorname{Im} Z$ 是正定矩阵。*

14.3 Abel 第二定理

定义 14.3.1 (Jacobian 簇的上同调定义). 在 Kahler 流形 X 上，我们有如下映射：

$$H^1(X,\mathbb{Z}) \subseteq H^1(X,\mathbb{C}) \twoheadrightarrow H^{0,1}(X) = H^1(X,\mathscr{O}_X)$$

因此有复环面 $T = H^1(X,\mathscr{O}_X)/H^1(X,\mathbb{Z})$，它被称为 Kahler 流形 X 的 Jacobian 簇。

命题 14.3.2. 上述映射 $H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathscr{O}_X)$ 是由指数短正合列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\pi i} \mathscr{O} \to \mathscr{O}^* \to 0$$

诱导的。

证明. □

命题 14.3.3. 上述定义的 T 和前文定义的 *Jacobian* 簇相同。

定理 14.3.4 (Abel 第二定理). 紧 *Riemann* 面 S 上

$$\mathscr{J}(S) = Pic^0(S) := Div_0(S)/PDiv(S)$$

注意紧 *Riemann* 面上亚纯函数都是 $\deg 0$ 的。

证明.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & PDiv(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Div^0(X) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X,\mathscr{O}_X)/H^1(X,\mathbb{Z}) = \mathscr{J}(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & PDiv(X) \arrow[r] \arrow[d] & Div(X) \arrow[r] \arrow[d, "\deg"] & H^1(X,\mathscr{O}_X^*) = Pic(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, equal] \arrow[d] & H^2(X,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

那么 3×3-引理就说明第一行是正合列。 □

注记. 有关第一行的右正合性，还有如下加强的结果：

定理 14.3.5 (Jacobi Inversion). 亏格 g 的紧 *Riemann* 面 S 上，固定 $p_0 \in S$，$\omega_1,\cdots,\omega_g$ 为一组 $H^0(S,\Omega^1)$ 的基，那么对于任何 $\lambda \in \mathscr{J}(S)$，都存在 g 个 S 上的点 $p_1,\cdots,p_g$，使得：

$$\mu(\sum_i (p_i - p_0)) = \lambda$$

其中 μ 是 *Abel-Jacobi* 映射。

推论 14.3.6. 亏格为 g 的紧 *Riemann* 面上，每个 $\deg \geq g$ 的除子都线性等价于一个有效除子。

推论 14.3.7. *每个亏格为 1 的 Riemann 面都形如某个复环面* $\mathbb{C}/\Lambda$。

证明. 我们注意 Abel-Jacobi 映射此时可以变为：$\mu : S \to Div^0(S) \to \mathscr{J}(S)$，其中第一个箭头将 p 送到除子 $p - p_0$。

这个映射是单的，因为如果 $\mu(p-p_0) = \mu(p'-p_0)$。那么 $(f) = (p-p')$。但是再一次地，亏格为 1 的曲线上不存在极点只有一个单极点的亚纯函数。

Jacobi Inversion 说明 μ 是满的。因此 $\mu : S \to \mathscr{J}(S)$ 给出了同构。 □

14.4 第二互反律

保持和第一互反律相同的典范基 $\delta_1, \cdots, \delta_g; \delta_{g+1}, \cdots, \delta_{2g}$。

定理 14.4.1 (第二互反律). *对于 S 上的全纯 1-形式 ω；亚纯 1-形式 η 使得其在各个极点处留数消失。Π^i, N^i 分别为 ω, η 在 δ_i 上的周期，在每个 η 的极点 p 处有展开*

$$\eta(z) = (a^p_{-n} z^{-n} + \cdots + a^p_{-2} z^{-2} + a^p_0 + a^p_1 z + \cdots)dz$$

$$\omega(z) = (b^p_0 + b^p_1 z + \cdots)dz$$

则：

$$\sum_{i=1}^{g} (\Pi^i N^{g+i} - \Pi^{g+i} N^i) = 2\pi\sqrt{-1} \sum_{p,j} \frac{a^p_{-j} b^p_{j-2}}{j-1}$$

证明. 证明和第一互反律是类似的。此时唯一的差别在于：

$$\pi(z) = (\int_{s_0}^{p} \omega) + b^p_0 z + \frac{1}{2} b^p_1 z^2 + \cdots$$

于是

$$\int_{\partial\Delta} \pi \cdot \eta = 2\pi\sqrt{-1} \sum_p Res_p(\pi \cdot \eta)$$
$$= 2\pi\sqrt{-1} \sum_p \sum_{j=2}^{n} \frac{a^p_{-j} \cdot b^p_{j-2}}{j-1}$$

□

定理 14.4.2 (Weil). *紧 Riemann 面 S 上的两个亚纯函数 f, g 满足除子 $(f), (g)$ 无交。那么：*

$$\prod_{p\in S} f(p)^{\mathrm{ord}_p(g)} = \prod_{p\in S} g(p)^{\mathrm{ord}_p(f)}$$

证明. 再次考虑亏格 g 曲面的标准多边形表示 Δ。假设 $\{p_i\}, \{q_i\}$ 分别是除子 $(f), (g)$ 的支撑。现在从一个共同起点 δ_0 出发用 α_i 光滑地联结 δ_0 和 p_i，使得诸 $\alpha_i - \{\delta_0\}$ 无交，并且不包含任何 q_i。

取 Δ' 为减去上述 α_i 得到的多边形：它是单连通的，因此选取一个 $\log f$ 的连通分支。现在取

$$\varphi = \log f \cdot d\log g = \log f \cdot \frac{dg}{g}$$

在每个 q_i 处，dg/g 有 1 阶极点，留数是 $\mathrm{ord}_{q_i}(g)$。于是由留数定理：

$$\int_{\partial\Delta'}\varphi = 2\pi\sqrt{-1}\cdot\sum_{q_i} Res_{q_i}(\varphi)$$

$$= 2\pi\sqrt{-1}\cdot\sum_{q_i}\mathrm{ord}_{q_i}(g)\cdot\log f(q_i)$$

另一方面，对于 $p\in\delta_i, p'\in\delta_i^{-1}$，使得它们在 S 中对应于同一个点：

$$\log f(p') = \log f(p) + \int_{\delta_{g+i}} d\log f$$

因此

$$\int_{\delta_i+\delta_i^{-1}}\varphi = (\int_{\delta_i} d\log g)(-\int_{\delta_{g+i}} d\log f)$$

同理

$$\int_{\delta_{g+i}+\delta_{g+i}^{-1}}\varphi = (\int_{\delta_{g+i}} d\log g)(\int_{\delta_i} d\log f)$$

对于 $p\in\alpha_i, p'\in\alpha_i^{-1}$ 使得它们在 S 中对应于同一个点：

$$\log f(p') = \log f(p) - 2\pi\sqrt{-1}Res_{p_i}d\log f = \log f(p) - 2\pi\sqrt{-1}\cdot\mathrm{ord}_{p_i}(f)$$

因此

$$\int_{\alpha_i+\alpha_i^{-1}}\varphi = 2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ord}_{p_i}(f)\cdot\int_{s_0}^{p_i} d\log g$$

于是这就说明了

$$2\pi\sqrt{-1}\cdot\sum_{q_i}\mathrm{ord}_{q_i}(g)\cdot\log f(q_i) = \sum_{i=1}^{g}((\int_{\delta_i} d\log f)(\int_{\delta_{g+i}} d\log g) - (\int_{\delta_i} d\log g)(\int_{\delta_{g+i}} d\log f))$$

$$+2\pi\sqrt{-1}\sum_i\mathrm{ord}_{p_i}(f)(\log g(p_i) - \log g(s_0))$$

$$= \sum_{i=1}^{g}((\int_{\delta_i} d\log f)(\int_{\delta_{g+i}} d\log g) - (\int_{\delta_i} d\log g)(\int_{\delta_{g+i}} d\log f)) + 2\pi\sqrt{-1}\sum_i\mathrm{ord}_{p_i}(f)(\log g(p_i))$$

于是

$$2\pi\sqrt{-1}(\sum\mathrm{ord}_{q_i}(g)\cdot\log f(q_i) - \sum\mathrm{ord}_{p_i}(f)\cdot\log g(p_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{g}((\int_{\delta_i} d\log f)(\int_{\delta_{g+i}} d\log g) - (\int_{\delta_i} d\log g)(\int_{\delta_{g+i}} d\log f))$$

然而 $\int_{\delta_i} d\log f\in 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$，于是上式右侧是 $(2\pi\sqrt{-1})^2\mathbb{Z}$ 中的元素，从而上式左侧是 $2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}$ 中的元素。两侧取指数就得到了结果。 □

14.5 Riemann-Roch 公式

定理 14.5.1. *D 是亏格 g 的紧 Riemann 面上的除子，那么：*

$$\dim H^0(X,D) - \dim H^1(X,D) = 1 - g + \deg D$$

证明. 结论对 $D=0$ 成立：因为此时左侧为 $1-g$，等式立刻成立。

假设结论对 D 成立，我们来看除子 $D+p$ 的情况：现在由层的短正合列

$$0 \to \mathscr{O}(D+p-p) \to \mathscr{O}(D+p) \to \mathscr{O}((D+p)|_p) \to 0$$

即：

$$0 \to \mathscr{O}(D) \to \mathscr{O}(D+p) \to \mathbb{C}_p \to 0$$

取长正合列就有：

$$0 \to H^0(X,D) \to H^0(X,D+p) \to \mathbb{C} \to H^1(X,D) \to H^1(X,D+p) \to 0$$

于是计算维数就有：

$$\dim H^0(X,D+p) - \dim H^1(X,D+p) = \dim H^0(X,D) - \dim H^1(X,D) + 1$$

但后者恰好是 $1-g+\deg D+1 = 1-g+\deg(D+p)$，这就直接说明了结果。

同理，结论对 D 成立也能直接说明 $D-p$ 也成立，因此这就给出了结果。 □

推论 14.5.2. *由 Serre 对偶：*

$$h^0(D) - h^0(K-D) = 1 - g + \deg D$$

14.6 典范曲线

命题 14.6.1. *S 是亏格 ≥ 2 的紧 Riemann 面，K 是 S 上的典范丛。那么 $|K|$ 无基点。*

证明. 如果 p 是基点，那么 $g = h^0(K) = h^0(K-p)$，从而：

$$h^0(p) = \deg(p) - g + 1 + h^0(K-p) = 2$$

但是 $h^0(p)$ 维数非 1 说明存在仅以 p 为 1 阶极点的亚纯函数，这和 $g \geq 2$ 矛盾。 □

定义 14.6.2 (典范曲线)**.** S 是亏格 ≥ 2 的紧 Riemann 面，K 是 S 上的典范丛。$|K|$ 给出了：$\iota_K : S \to \mathbb{P}^{g-1}$。这个映射称为 S 的典范映射，$\iota_K(S)$ 称为典范曲线。

命题 14.6.3. *ι_K 不是复流形的嵌入当且仅当 S 上存在亚纯函数仅有两个极点。这等价于 S 是 $\mathbb{P}^1$ 的二重分歧覆叠。*

证明. ι_k 是单的，如果对每个 $p,q\in S$，存在 $\omega\in H^0(S,\Omega^1)$ 使得 $\omega(p)=0,\omega(q)\neq 0$；它是浸入，如果对每个 $p\in S$ 存在 ω 恰好以 1 阶在 p 点消失。

于是 ι_K 是嵌入，如果对每个 p,q（p,q 不一定不同），

$$h^0(K-p-q)<h^0(K-p)$$

注意前一命题说明：$h^0(K-p)=g-1$。但是由 Riemann-Roch：

$$h^0(K-p-q)=h^0(p+q)+g-1-2$$

从而 $h^0(K-p-q)<h^0(K-p)\iff h^0(p+q)=1$。于是 ι_K 不是嵌入 $\iff$ 存在一个仅有两个极点的亚纯函数（这两个极点可以相同）。这给出了一个 $S\to\mathbb{P}^1$ 的全纯映射，观察 ∞ 的原像即知这是一个（有分歧的）二重覆叠。 □

定义 14.6.4 (超椭圆). 满足上述命题中条件的 Riemann 面称为超椭圆的。

定理 14.6.5 (几何 Riemann-Roch 定理).

证明. 对于典范曲线 $\iota_K(S)$，S 上任何除子 $D=\sum p_i$，$h^0(K-D)$ 恰好是包含 $\iota_K(p_i)$ 的 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中的超平面的个数。 □

参考文献

[Ber12] George M. Bergman. *On diagram-chasing in double complexes*. 2012. eprint: 1108.0958. URL: https://arxiv.org/pdf/1108.0958.pdf (cit. on p. 32).

[Che01] Shiing-Shen Chern & Weihuan Chen. 微分几何讲义. 2nd ed. 北京大学出版社, 2001 (cit. on pp. 39, 44).

[Fu23] Lei Fu. *Algebraic Geometry*. 2nd ed. 现代数学基础, 81. 高等教育出版社, 2023 (cit. on p. 32).

[Gal07] S.S. Shatz & Jean Gallier. *Complex Algebraic Geometry*. 2007. URL: https://www.cis.upenn.edu/~ (cit. on pp. 62, 79, 82).

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer New York, 1977. DOI: 10.1007/978-1-4757-3849- (cit. on p. 23).

[Har94] Phillip Griffiths & Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. 1994. ISBN: 0471050598 (cit. on pp. 16, 62, 105, 119).

[PMF14] H.L.Royden & P.M.Fitzpatrick. *Real Analysis*. 4th ed. 2014 (cit. on p. 56).

[Rot09] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer, New York, NY, 2009. ISBN: 9780387245270 (cit. on pp. 19, 23, 24, 31).

[卜辰璟] 卜辰璟. 示性类:*2019* 秋季学期讨论班讲义. URL: https://www.bananaspace.org/wiki/%E8%AE%B2 (cit. on p. 101).