Eichler-Shimura 理论

ZIXI LI

2024 年 12 月 1 日

目录

1 模形式的上同调描述

我们首先回忆基本的模形式定义：

定义 1.1 (同余子群，尖点). 对于任何 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，定义

$$\Gamma(N) = \{\gamma \in SL(2,\mathbb{Z}) | \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \bmod N\}$$

$$\Gamma_1(N) = \{\gamma \in SL(2,\mathbb{Z}) | \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ & 1 \end{pmatrix} \bmod N\}$$

$$\Gamma_0(N) = \{\gamma \in SL(2,\mathbb{Z}) | \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix} \bmod N\}$$

对于子群 $\Gamma \leq SL(2,\mathbb{Z})$，称其为同余子群，如果存在 N 使得 $\Gamma \supseteq \Gamma(N)$。特别地，作为 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的子群，其在上半平面 $\mathcal{H}$ 上有左作用 $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$。

称同余子群 Γ 的尖点为 $\mathbb{Q}^*$ 在 Γ 作用下的等价类。

注意 ∞ 是 $SL(2,\mathbb{Z})$ 唯一的尖点，于是 $SL(2,\mathbb{Z})\infty = \bigcup_{\Gamma \backslash SL(2,\mathbb{Z})} \Gamma g_i \infty$.

定义 1.2 (同余子群的模形式)**.** 设 Γ 为同余子群，一个全纯函数 $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ 称为权为 k，级为 Γ 的模形式，如果：

1. 对于任何 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$，均有 $f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^k f(\tau)$

2. 对于任何尖点的代表元 $\alpha\infty, \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$：

$$h(z) = (cz + d)^{-k} f(\alpha z), z \in \mathcal{H}$$

   在 ∞ 处是全纯的。

更进一步，如果对每个尖点还要求 f 对应的 h 在 ∞ 处消没，则称 f 是尖点形式。

模形式构成的线性空间记为 $M_k(\Gamma)$，尖点形式构成的子空间记为 $S_k(\Gamma)$.

注记. 取 $q_N(\tau) = e^{2\pi i\tau/N}$，那么如果 $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ 满足 $f(\tau + N) = f(\tau)$，则其可下降到 q_N 上，从而有 Laurent 展开

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q_N^n$$

称为其 Fourier 展开。特别地，尖点全纯性可以用这一展开描述，因为其实质上就是 f 在 ∞ 处的 Laurent 展开（注意 $\mathrm{Im}\, z \to +\infty$ 时 $q \to 0$）

定义-定理 1.3 (模曲线的解析理论)**.** *记 $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$，定义商空间 $X = \Gamma\backslash\mathcal{H}^*, Y = \Gamma\backslash\mathcal{H}$。其上均有复结构，并且前者是紧黎曼面且为后者的紧化。*

1.1 线丛 ω^k

本节的目标是将模形式的定义翻译为复流形 X 上某个线丛的全局截面。与之相对应地，尖点形式即为满足某个消没条件的线丛截面。

定义线丛 ω^k 如下：考虑 $\Gamma\backslash(\mathcal{H} \times \mathbb{C}) \to Y$，其中 p 是保留第一个因子，$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma$ 的作用是

$$\gamma \cdot (\tau, z) = (\gamma(\tau), (c\tau + d)^k z)$$

线丛 ω^k 可以被理解如下：

注记. Y 上的线丛 ω^k 可以延拓到 X 上，仍记为 ω^k。这是通过延拓 $\Gamma\backslash(\mathcal{H}^* \times \mathbb{C})$，其全纯性来自我们取尖点 $t = \alpha \cdot \infty$ 的某个充分小开邻域 $U \subseteq \mathcal{H}$。定义

$$\Gamma(V, \omega) = \mathcal{O}((c\tau + d)^{-k} \cdot z)|_{U - \{t\}, \Gamma\text{-inv}}$$

（其中 $V = \pi(U)$ 是 U 在商映射 $\pi : \mathcal{H} \to \Gamma\backslash\mathcal{H}$ 的像）

我们解释一下这个记号的含义，它指所有 $z = z(\tau) : U - \{t\} \to \mathbb{C}$，使得 $(c\tau + d)^{-k} z(\tau)$ 是全纯（并且 Γ-不变）。

特别地，注意到这一截面在 $\alpha \cdot \infty$ 附近的行为就是坐标 z 在 $t = \infty$ 渐进的行为（再沿 Γ 下降），因此这的确给出了一个全纯线丛。

对比上述构造和模形式的条件，我们立刻就有：

命题 1.4. *存在线性空间的自然同构*

$$M_k(\Gamma) = H^0(X, \omega^k)$$

$$S_k(\Gamma) = H^0(X, \omega^k(-D))$$

其中 D 是除子 $D = \pi(\mathbb{Q} \cup \{\infty\}) = X - Y$。

1.2 Kodaira-Spencer 同构

在 $k = 2$ 的特殊情况下，我们能给 $\omega^2(-D)$ 以一个更加精确的描述，它被称为所谓 Kodaira-Spencer 同构。

命题 1.5 (Kodaira-Spencer 同构). *存在 X 上线丛之间的态射 $KS : K_X \to \omega^2$，使得其在 Y 上同构并且在每个尖点 $t \in X - Y$ 处恰有一阶零点。等价地，它诱导了*

$$KS : K_X \xrightarrow{\sim} \omega^2(-D)$$

其中 D 是除子 $D = \pi(\mathbb{Q} \cup \{\infty\}) = X - Y$。

证明. 取 $KS : K_X \to \omega^2 : d\tau \mapsto z^{\otimes 2}$. 我们只需要检查其在尖点处的行为。再一次由于 Γ-等变性，无妨只考虑 ∞ 附近的情况。

由于 Γ 是同余子群，其（约化到 $PSL_2(\mathbb{R})$ 中）不动点群形如 $\begin{pmatrix} 1 & a\mathbb{Z} \\ & 1 \end{pmatrix}, \exists a > 0$。于是模曲线的解析理论指出 X 在 ∞ 附近的局部坐标由 $q = e^{2\pi i \tau / a}$ 给出，并且延拓定义 $q(\infty) = 0$。

现在 $d\tau = \dfrac{a \cdot dq}{2\pi i q}$，其被映成了 ω 中的平凡化截面，但左侧有一阶极点，这就说明了结果。 □

如有熟悉复结构形变理论者，应当知晓 Kodaira-Spencer 映射。我们简要解释其与前一命题中出现的映射之间的关联。

考虑如下复结构的形变 $\pi : \mathcal{E} \to Y = \Gamma\backslash\mathcal{H}$，其在每一点 $t \in p$ 处的纤维恰好是 t 作为 $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ 分类的（Γ-级）椭圆曲线。举例来讲，如果我们取 $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$，注意到此时对应的 X 的确变成了 $\mathbb{T}^2$ 上复结构的模空间；而如果取一个子群 $\Gamma \leq SL(2, \mathbb{Z})$，它分类了比复结构更加精细的结构，例如 $\Gamma_0(N)$ 相当于要求标记特殊的某 N 个点等等。

现在我们固定一点 $t\in Y$ 并考虑其给出的 Kodaira-Spencer 映射

$$H^0(TY\otimes\mathcal{O}_{\pi^{-1}(t)})\to H^1(\pi^{-1}(t),T\pi^{-1}(t))$$

记 $\pi^{-1}(t)=\mathcal{E}_t$，由 Serre 对偶上式右端为

$$H^1(\mathcal{E}_t,-K)=H^0(\mathcal{E}_t,2K)$$

因此通过变动 t 将之做成 Y 上的线丛之间的映射（当然正确的描述应当是相对 de Rham 上同调，这里仅给出一个不甚严谨的论述），我们实际上得到的正是映射

$$KS:TY\to(\omega^*)^{\otimes 2}$$

取对偶后就变为前述 Kodaira-Spencer 同构。

上述讨论暗示了为从几何观点研究模形式，椭圆曲线的形变 $\pi:\mathcal{E}\to Y$ 理应是一个有意义的几何对象。事实上这正是 Eichler-Shimura 同构的背景。当然如何将上述“模空间和万有椭圆曲线”构造严格化并延拓到尖点上有待进一步论述，我们将在下一节中详细讨论。

2 椭圆曲线的模空间

这一节我们严格叙述上一节中通过解析手段产生的几何对象。首先需要处理的就是严格化 $\pi:\mathcal{E}\to Y$ 的定义并将其延拓到 X 上，同时用这一严格化的定义重述上一节讨论的相关内容。

2.1 广义椭圆曲线

为了严格叙述将前述 Y 上构造延拓到 X 上的过程,我们引用 Deligne-Rapport (cf. [DeRa73]) 给出的所谓广义椭圆曲线的概念。这些工作的主要目的是将椭圆曲线视作算术对象来处理，其 $\mathbb{C}$-点的解析化自然回到了上一节的构造。

定义 2.1 (椭圆曲线). 概形 S 上的椭圆曲线是指光滑紧合概形 $f:E\to S$ 以及一个截面 $0:S\to E$ 满足如下条件:

在任何几何纤维上 $E_{\bar{s}}$ 是 $\kappa(\bar{s})$ 上的连通的亏格 1 曲线。

注记. 固定零截面 s 后，E 上有唯一的交换群概形结构。

定义 2.2 (广义椭圆曲线). 概形 S 上的广义椭圆曲线是指紧合平坦概形 $f:E\to S$ 以及一个态射 $+:E^{sm}\times_S E\to E$，并满足如下条件。其中 E^{sm} 是指 E 中最大的开子概形 U 使得 $f|_U:U\to S$ 光滑。

1. $+$ 限制到 E^{sm} 上使之成为了交换群概形，并且它给出了群概形 E^{sm} 在 E 上的作用
2. 在任何几何纤维上 $(E_{\bar{s}},+_{\bar{s}})$ 要么是代数闭域 $\kappa(\bar{s})$ 上的椭圆曲线，要么同构于某个 Néron n-边形 $P_{n,\kappa(\bar{s})}$。

   这里 Néron n-边形 $P_{n,K}=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}U_i$，并且 $U_i=\mathrm{Spec}\ K[X_i,Y_i]/(X_yY_i)$，粘合方式为 $V_i=U_i[X_i^{-1}]=\mathrm{Spec}\ K[X_i,X_i^{-1}]$ 和 $W_i=U_{i-1}[Y_{i-1}^{-1}]=\mathrm{Spec}\ K[Y_{i-1},Y_{i-1}^{-1}]$ 通过映射 $X_i\mapsto Y_{i-1}^{-1}$ 粘合。

注记. 事实上 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上的广义椭圆曲线 E 恰好反应的是 $E\otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}}\mathbb{Q}$ 具有 mod$p$ 稳定约化。

定义 2.3. 1. 定义函子 $\mathcal{M}_0(N):\mathbf{Sch}_{\mathbb{Q}}^{op}\to\mathbf{Set}$ 如下：

$$\mathcal{M}_0(N)(T)=\{(E,C)|E\to T \text{ is an elliptic curve}, C \text{ is a cyclic subgroup scheme of order } N\}$$

其将态射 $T\to T'$ 映到基变换诱导的集合映射。

2. 广义椭圆曲线 $E\to S$ 上的 $\Gamma_0(N)$ 结构是指 E^{sm} 的一个 N 阶子循环群概形 C，并且对于每个几何点 $\bar{s}$，$C\times_S\bar{s}$ 与 $E_{\bar{s}}$ 的每个不可约分支均有交

3. 定义函子 $\overline{\mathcal{M}_0}(N):\mathbf{Sch}_{\mathbb{Q}}^{op}\to\mathbf{Set}$ 如下：

$$\overline{\mathcal{M}_0}(N)(T)=\{(E,C)|E\to T \text{ is a generalized elliptic curve}, C \text{ is a } \Gamma_0(N)\text{-structure}\}$$

其将态射 $T\to T'$ 映到基变换诱导的集合映射。

定义 2.4. 1. 定义函子 $\mathcal{M}(N):\mathbf{Sch}_{\mathbb{Q}}^{op}\to\mathbf{Set}$ 如下：

$$\mathcal{M}(N)(T)=\{(E,\alpha)|E\to T \text{ is an elliptic curve}, \alpha:(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2\to E[N] \text{ isomorphism}\}$$

这里 $E[N]=\ker(E(T)\overset{\times n}{\to}E(T))$，其中乘法映射由交换群概形结构给出。

2. 广义椭圆曲线 $E\to S$ 上的 $\Gamma(N)$ 结构是指群概形的闭浸入 $\alpha:(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2\to E^{sm}$，使得对于每个几何点 $\bar{s}$，$\alpha_{\bar{s}}$ 的像与 $E_{\bar{s}}$ 的每个不可约分支均有交。

3. 定义函子 $\overline{\mathcal{M}}(N):\mathbf{Sch}_{\mathbb{Q}}^{op}\to\mathbf{Set}$ 如下：

$$\overline{\mathcal{M}}(N)(T)=\{(E,\alpha)|E\to T \text{ is a generalized elliptic curve}, \alpha \text{ is a } \Gamma(N)\text{-structure}\}$$

注记. 直观上来看，$\Gamma(N)$ 结构标记了椭圆曲线上的 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 格点，而 $\Gamma_0(N)$ 只标记了 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 格点。$\Gamma(N)\subseteq\Gamma_0(N)$ 正是诱导了将 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 个格点视作 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的对角线。

定义 2.5. 固定一个函子 $\mathcal{M}:\mathbf{Sch}_S^{op}\to\mathbf{Set}$：

1. 称一个 S 上概形 M 是细模空间 (Fine moduli space)，如果 $\mathcal{M}$ 被 M 可表。

2. 称一个 S 上概形 M 是粗模空间 (Coarse moduli space)，如果存在自然变换 $a:\mathcal{M}(-)\Rightarrow\mathrm{Hom}(-,M')$ 使得：

   (a) 对于任何 $M'\to S$：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}(M,M') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{M}(-),\mathrm{Hom}(-,M')) \\ \underset{M\to M'}{g:} & \mapsto & \underset{\mathcal{M}\Rightarrow\mathrm{Hom}(-,M)\Rightarrow\mathrm{Hom}(-,M')}{g\circ a:}\end{array}$$

   是双射

   (b) 自然变换 a 在任何几何点 $\bar{s}$ 处的取值 $\mathcal{M}(\bar{s})\to\mathrm{Hom}(\bar{s},M)$ 都是双射。

我们有如下结果：

定理 2.6. 给定正整数 N：

1. $\overline{\mathcal{M}_0}(N), \mathcal{M}_0(N)$ 均有粗模空间，分别记为 $X_0(N), Y_0(N)$。前者是 $\mathbb{Q}$ 上紧合光滑连通曲线，后者是其中稠密仿射开集。

2. $\overline{\mathcal{M}}(N), \mathcal{M}(N)$ 均有粗模空间，分别记为 $X(N), Y(N)$。$N \geq 3$ 时它们都是细模空间。前者是 $\mathbb{Q}$ 上紧合光滑曲线，后者是其中稠密仿射开集。

除了 $\Gamma(N)$ 和 $\Gamma_1(N)$ 级结构，我们还会考虑 $\Gamma_0(N)$ 以及其一些变体，在此罗列如下：

定义 2.7. 1. 定义函子 $\mathcal{M}_1(N) : \mathbf{Sch}^{op}_{\mathbb{Z}[1/N]} \to \mathbf{Set}$ 如下：

$$\mathcal{M}_1(N)(S) = \{(E, \alpha) | \alpha : S \to E \text{ a section of exact order } N\}$$

2. 定义函子 $\mathcal{M}_1(N, p) : \mathbf{Sch}^{op}_{\mathbb{Z}[1/Np]} \to \mathbf{Set}$ 如下：

$$\mathcal{M}_1(N,p)(S) = \left\{ (E, \alpha, C) | \begin{matrix} \alpha : S \to E \text{ a section of exact order } N \\ C \text{ a cyclic subgroup of order p, no intersection with } \langle P \rangle \end{matrix} \right\}$$

定理 2.8. 给定正整数 $N > 5$：

1. $\mathcal{M}_1(N)$ 被一仿射概形表出，记为 $Y_1(N)$。其在 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}[1/N]}$ 上有限平坦，其紧化 $X_1(N) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}[1/N]}$ 由正规化给出，并且得到的是 $\mathbb{Z}[1/N]$-上的紧合概形，其解析化和 $\Gamma_1(N) \backslash \mathcal{H}^*$ 相符。

2. $\mathcal{M}_1(N,p)$ 被一 $\mathbb{Z}[1/Np]$ 上仿射概形表出，记为 $Y_1(N,p)$。其紧化 $X_1(N,p)$ 是 $\mathbb{Z}[1/Np]$ 上的紧合概形，其解析化和 $(\Gamma_1(N,p)) \backslash \mathcal{H}^*$ 相符。

   这里

$$\Gamma_1(N,p) = \begin{cases} \Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p) & p \nmid n \\ \Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)^T & p \mid n \end{cases}$$

2.2 基本框架和一些注记

尽管模曲线 $X_0(N)$ 在算术几何中扮演了重要的角色，为简便起见我们接下来始终选用 $X(N), Y(N), N \geq 3$ 作为基本设定。特别地，有：

命题 2.9. $X(N)(\mathbb{C})^{an} = X_{\Gamma(N)} = \Gamma(N) \backslash \mathcal{H}^*$，对 $Y(N)$ 也是如此。从现在起始终记之为 X_Γ, Y_Γ。

定义 2.10. 由于 X_Γ 是细模空间，$\mathrm{id} : X_\Gamma \to X_\Gamma$ 分类了一个广义椭圆曲线 $\pi : \mathcal{E}_\Gamma \to X_\Gamma$。

定义 $\omega = \pi_* \omega_{\mathcal{E}/X}$，其中 $\omega_{\mathcal{E}/X}$ 是 $\mathcal{E} \to X$ 的相对对偶层，特别地限制到 Y 上就回到了 $\pi_* \Omega_{\mathcal{E}|_Y / Y}$。$\omega$ 对应到黎曼面 X_Γ 上的线丛正是前文构造的 ω。这实际上符合 Kodaira-Spencer 映射中 $(\omega^*)^{\otimes 2}$ 一端是 $H^0(\mathcal{E}_t, 2K)$ 的直观。

推论 2.11.

$$M_k(\Gamma) = H^0(X_\Gamma, \omega^{\otimes k})$$

$$S_k(\Gamma) = H^0(X_\Gamma, \omega^{\otimes k}(-D))$$

$$\omega^{\otimes 2}(-D) \cong \Omega^1_{X_\Gamma/\mathbb{Q}}$$

这里通过引入广义椭圆曲线来做出 $\mathcal{E} \to X$ 似乎不甚本质，因为 Eichler-Shimura 同构本质上并不依赖任何 $\mathbb{Q}$-概形结构，事实上我们总可以保持使用紧 Riemann 面的语言进行论述。这样的坏处是其中涉及若干边角细节，例如 [LWW20] 中所做，因此为简便起见对 Γ 做了如此强的假设。

3 Eichler-Shimura 同构

3.1 De Rham 上同调与 Gauss-Manin 联络

首先我们考虑相对 de Rham 上同调

定义 3.1 (相对 de Rham 上同调)**.** 定义 $p: X \to S$ 的相对 de Rham 上同调为

$$\mathcal{H}^n_{dR}(X/S) = (R^n p_*)(\Omega^\bullet_{X/S}) = \mathbb{H}^n(\Omega^\bullet_{X/S})$$

其中 $\Omega^\bullet_{X/S}$ 为 Kahler 微分层产生的 de Rham 复形，相对 de Rham 上同调定义为其超上同调。

注记. 相对 de Rham 上同调 $\mathcal{H}^n(X/S)$ 应当被理解为随纤维的 de Rham 上同调变动的层，因此我们采用 $\mathcal{H}$ 而非 H 以强调其为 S 上的层。

命题 3.2. *对于光滑态射 $p: X \to S$，$\mathcal{H}^n_{dR}(X/S)$ 是 S 上的拟凝聚层。如果更进一步其紧合，则 $\mathcal{H}^n_{dR}(X/S)$ 成为代数向量丛。另外 $\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C})$ 是 $X_\mathbb{C}$ 上代数向量丛，由 GAGA 其对应着紧 Riemann 面 X 上的秩 2 向量丛。*

Eichler-Shimura 同构的关键之处正是计算 $\mathcal{H}^n_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C})$ 这个层的 de Rham 上同调，即链复形

$$0 \to \mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) \otimes \Omega^1_{X_\mathbb{C}/\mathbb{C}} \xrightarrow{\nabla} \cdots$$

的超上同调。一个自然的希望是利用 Hodge to de Rham 谱序列（在这里是超上同调谱序列 $E_1^{pq} = R^q F(M^p) \Rightarrow R^{p+q} F(M^\bullet)$）

$$E_1^{pq} = H^q_{dR}(X_\mathbb{C}, \mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) \otimes \Omega^p_{X_\mathbb{C}/\mathbb{C}}) \implies H^{p+q}_{dR}(X_\mathbb{C}, \mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}))$$

事实上的确如此，但是我们需要指出 ∇ 的定义并不是自然出现而是需要手动完成的，它本质上给出了 $\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C})$ 对应的向量丛上的联络，这被称为 Gauss-Manin 联络。

与此同时，由于我们最终只需要计算 1 阶项（即 $H^1(X_\mathbb{C}, \mathcal{H}^n_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}))$ 相关），我们实际上并不需要将 ∇ 延展为整个链复形。我们将在下一节里详细阐述，这一节里我们定义 Gauss-Manin 联络。

命题 3.3. *存在正合列*

$$0 \to \omega \to \mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) \to \omega^{-1} \to 0$$

证明. 逐纤维地看，这来自 Hodge 分解 $\omega \oplus \bar{\omega} = H^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C})$。在 ∞ 处的延拓则是来自 $\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C})$ 的具体计算。 □

上述正合列自然诱导了滤过：

定义 3.4. 定义 $Sym^k\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C})$ 上的滤过 $F^0 \supseteq F^1 \supseteq \cdots \supseteq F^k \supseteq 0$ 为

$$F^h Sym^k\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) = \omega^{\otimes h} \otimes Sym^{k-h}\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) \subseteq Sym^k\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C})$$

其中含入映射来自前述正合列。

特别地，注意 $\mathcal{H}^1_{dR} = \omega \oplus \omega^{-1} \implies Sym^k\mathcal{H}^1_{dR} = \omega^k \oplus \omega^{k-2} \oplus \cdots \oplus \omega^{-k}$

定义 3.5 (Gauss-Manin 联络)**.** 定义 $\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C})$ 上的联络

$$\nabla : \mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) \to \mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) \otimes \Omega_{X_\mathbb{C}/\mathbb{C}}(D)$$

其中 D 为尖点集产生的除子 $X_\mathbb{C} - Y_\mathbb{C}$。该联络描述如下：其恰好使得椭圆曲线的周期成为平行截面。具体来说在开模曲线 $Y_\mathbb{C}$ 上：

$$\nabla(\alpha \otimes f) = \alpha \otimes df \in \mathcal{H}^1_{dR} \otimes \Omega$$

自然地，它诱导了 $Sym^k\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C})$ 上的联络。

定理 3.6. *固定 Gauss-Manin 联络* $\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) \to \mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) \otimes \Omega_{X_\mathbb{C}/\mathbb{C}}(D)$：

1. $\ker\nabla = j_*\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}|_{Y_\mathbb{C}}/Y_\mathbb{C}) = j_*R^1\pi_*\mathbb{C}_Y$
2. *(Griffiths 横截性)* $\nabla F^h \subseteq F^{h-1} \otimes \Omega_{X_\mathbb{C}/\mathbb{C}}(D)$

证明. 注意 ∇ 的定义恰好为 $j_*(\mathrm{id}\otimes d)$ 的限制，则第一部分自然成立。第二部分为具体计算。 □

Griffiths 横截性保证了联络和分次结构相容，因此我们可以考察 F^h/F^{h+1} 在 ∇ 下的像。注意 $F^h/F^{h+1} = \omega^{2h-k}$，此时 Gauss-Manin 联络诱导了

$$\nabla : \omega^{2h-k} \xrightarrow{\sim} \omega^{2h-k-2} \otimes \Omega_{X_\mathbb{C}/\mathbb{C}}(D)$$

这个同构恰好就是 Kodaira-Spencer 映射。

现在我们只需观察 F^k 的像，其为 $F^k \otimes \Omega_{X_\mathbb{C}/\mathbb{C}}$，因此我们有：

命题 3.7.

$$\mathrm{Im}(\nabla) = (\omega^k \otimes \Omega_{X_\mathbb{C}/\mathbb{C}}) \oplus (F^0/F^k \otimes \Omega_{X_\mathbb{C}/\mathbb{C}}(D))$$

3.2 Eichler-Shimura 同构

现在我们希望计算 de Rham 链复形

$$0 \to Sym^{k-2}\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) \to Sym^{k-2}\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) \otimes \Omega_{X_\mathbb{C}/\mathbb{C}}(D)$$

$$\to Sym^{k-2}\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) \otimes \Omega^2_{X_\mathbb{C}/\mathbb{C}}(D) = 0 \to 0 \to \cdots$$

然而较为可惜的是这个链复形在 $Sym^{k-2}\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) \otimes \Omega_{X_\mathbb{C}/\mathbb{C}}(D)$ 处并不正合（前文已经计算过 ∇ 的像）。因此我们转而考虑

$$\mathfrak{F}^0 = [0 \to Sym^{k-2}\mathcal{H}^1_{dR}(\mathcal{E}_\mathbb{C}/X_\mathbb{C}) \to \mathrm{Im}(\nabla) \to 0 \to \cdots]$$

考虑滤复形 $\mathfrak{F}^0 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{F}^{k+1} \supset 0$

$$\mathfrak{F}^h = [0 \to F^h \to (F^{h-1} \otimes \Omega_{X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}}(D)) \cap \mathrm{Im}(\nabla) \to 0 \to \cdots],\ h \in \{0, \cdots, k+1\}$$

因此其产生了谱序列：

$$E_1^{pq} = \mathbb{H}^{p+q}(X_{\mathbb{C}}, \mathfrak{F}^p/\mathfrak{F}^{p+1}) \implies \mathbb{H}^{p+q}(X_{\mathbb{C}}, \mathfrak{F}^0)$$

现在我们计算 $\mathfrak{F}^p/\mathfrak{F}^{p+1}$：

命题 3.8.

$$E_1^{pq} = \begin{cases} H^q(X_{\mathbb{C}}, \omega^{2-k}) & p = 0 \\ H^{q+k-2}(X_{\mathbb{C}}, \omega^{k-2} \otimes \Omega_{X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}}) & p = k-1 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

证明.

$$\mathfrak{F}^0/\mathfrak{F}^1 = [\cdots \to 0 \to \underset{\deg:0}{\omega^{2-k}} \to \underset{1}{0} \to \cdots]$$

$$\mathfrak{F}^{k+1} = [\cdots \to 0 \to \underset{\deg:0}{0} \to \underset{1}{\omega^k \otimes \Omega_{X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}}} \to \cdots]$$

前述对 ∇ 的计算（Kodaira-Spencer 同构）说明 $\mathfrak{F}^i/\mathfrak{F}^{i+1}, i \notin \{0, k+1\}$ 是零调的。 □

命题 3.9. 对于任何 $k-2 \geq 0$，上述谱序列退化。

证明. $k-2 > 0$ 的情况由 ω 是正线丛的论述立刻推出。而注意 ω^2 存在全纯截面，并且紧 Riemann 面上的非平凡线丛一定正定或负定，因此这就说明了 ω 是正线丛。

只需考虑 $k-2=0$ 的情况，此时谱序列退化为

$$E_1^{pq} = \begin{cases} H^q(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) & p = 0 \\ H^q(X_{\mathbb{C}}, \Omega_{X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}}) & p = 1 \end{cases}$$

其为微分映射就是由

$$d : \mathscr{O}_{X_{\mathbb{C}}} \to \Omega_{X_{\mathbb{C}}}$$

诱导的，但是 $\mathscr{O}_{X_{\mathbb{C}}}$ 的截面是常值，因此微分映射是零映射。 □

因此我们就说明了

$$H^1(X_{\mathbb{C}}, \ker \nabla) = \mathbb{H}^1(X_{\mathbb{C}}, \mathfrak{F}^0) = H^1(X_{\mathbb{C}}, \omega^{2-k}) \oplus H^0(X_{\mathbb{C}}, \omega^{k-2} \otimes \Omega_{X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}})$$

由 Serre 对偶，它是

$$= \overline{H^0(X_{\mathbb{C}}, \omega^{k-2} \otimes \Omega_{X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}})} \oplus H^0(X_{\mathbb{C}}, \omega^{k-2}, \otimes \Omega_{X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}})$$

$$= S_k(\Gamma) \oplus \overline{S_k(\Gamma)}$$

因此我们就得到了：

定理 3.10 (Eichler-Shimura 同构).

$$S_k(\Gamma)\oplus\overline{S_k(\Gamma)}=H^1(X_\Gamma,j_*Sym^{k-2}R^1\pi_*\mathbb{C})$$

引理 3.11. 仍固定 $X_{\mathbb{C}},Y_{\mathbb{C}}$ 如前，记 $j:Y_{\mathbb{C}}\hookrightarrow X_{\mathbb{C}},i:D\hookrightarrow X_{\mathbb{C}}$。则对于任何 $X_{\mathbb{C}}$ 上的层 M，有

$$H^0(X_{\mathbb{C}},j_*M)=H^0(Y_{\mathbb{C}},M)$$

$$H^1(X,j_*M)\simeq \mathrm{Im}[H^1_c(Y,M)\to H^1(Y,M)]$$

$$H^2(X_{\mathbb{C}},j_*M)=H^2_c(Y_{\mathbb{C}},M)$$

证明. 存在短正合列

$$0\to j_!M\to j_*M\to i_*i^*j_*M\to 0$$

检查其长正合列立刻给出 0 阶和 2 阶的情况。

我们有导出范畴中的好三角态射

$$\begin{tikzcd}
j_!M=\tau_{\le 0}Rj_!M \arrow[r] \arrow[d] & Rj_*M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\sim"] & C \arrow[r] \arrow[d, dashed] & j_!M[1] \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
j_*M=\tau_{\le 0}Rj_*M \arrow[r] & Rj_*M \arrow[r] & D \arrow[r] & j_*M[1] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

取长正合列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & j_!M \arrow[r] \arrow[d] & j_*M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\sim"] & H^0C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] & R^1j_*M \arrow[r] \arrow[d] & H^1D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & j_*M \arrow[r, "\mathrm{id}"] & j_*M \arrow[r] & H^0D \arrow[r] & 0 \arrow[r] & R^1j_*M \arrow[r] & H^1C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因此 $H^0D=0$,超上同调 $\mathbb{H}^1(X,D)\to\mathbb{H}^1(X,D)$ 是同构 (考虑超上同调谱序列 $H^q(X,H^p(-))\implies\mathbb{H}^{p+q}(X,-)$ 即可)。

从而在前述好三角上作用 $R\Gamma(X,-)$ 就有

$$\begin{tikzcd}
 & H^1(X,j_!M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{H}^1(X,Rj_*M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{H}^1(X,C) \arrow[d] \\
H^0(D) \arrow[r] & H^1(X,j_*M) \arrow[r] & \mathbb{H}^1(X,Rj_*M) \arrow[r] & \mathbb{H}^1(X,D)
\end{tikzcd}$$

然而

$$\mathbb{H}^1(X,Rj_*M)=R^1pRj_*M\cong R^1(pj)_*M\cong H^1(Y,M)$$

其中中间的同构是导出函子的复合给出的 Grothendieck 谱序列给出，因此追图即有

$$H^1(X,j_*M)=\ker[\mathbb{H}^1(X,Rj_*M)\to\mathbb{H}^1(X,D)]=\ker[\mathbb{H}^1(X,Rj_*M)\to H^1(X,C)]$$

$$=\mathrm{Im}[H^1(X,j_!M)\to\mathbb{H}^1(X,Rj_*M)]=\mathrm{Im}[H^1_c(Y,M)\to H^1(Y,M)]$$

□

在此引理下，Eichler-Shimura 同构变为：

推论 3.12.

$$S_k(\Gamma)\oplus\overline{S_k(\Gamma)}\cong\mathrm{Im}[H^1_c(Y,Sym^{k-2}R^1\pi_*\mathbb{C})\to H^1(Y,Sym^{k-2}R^1\pi_*\mathbb{C})]$$

3.3 相交上同调的混合 Hodge 结构

在本节结尾，我们指出 Eichler-Shimura 同构实质上可以理解为相交上同调上的 Hodge 结构，为此我们自由使用偏屈层的语言并不做过多细节上的论述。

定义 3.13 (可构造层)**.** 固定域系数 A，假定 X 为拟流形或复代数簇，其上按照维数或者光滑轨迹存在自然的划分 $\mathcal{S}=(X_j)_{j\in J}$。称 A_X-模层 $\mathcal{F}$ 为 ($\mathcal{S}$-) 可构造的，如果 $\mathcal{F}|_{X_j}$ 是局部系（局部上是某个 A-模 M 常值层），并且每个茎 $\mathcal{F}_x$ 都是有限生成 A-模。

更进一步，称 $\mathcal{F}^\bullet\in D^b(X)$ 为可构造的，如果其每一项都是可构造的。

定义 3.14 (偏屈层)**.** 条件如上，定义偏屈函数 $p:2\mathbb{N}\to\mathbb{Z}:2k\mapsto -k$. 对任何 $S\in\mathcal{S}$，定义 $p(S)=p(2\dim S)$，其中 $\dim S$ 是 S 的复维数。

我们定义可构造复形 $D^b_c(X)$ 上的 t-结构如下：

记

$$\operatorname{supp}^m(\mathcal{F}^\bullet)=\overline{\{x\in X|H^m(i_x^{-1}\mathcal{F}^\bullet)\neq 0\}}$$

$$\operatorname{cosupp}^m(\mathcal{F}^\bullet)=\overline{\{}x\in X|H^m(i_x^{!}\mathcal{F}^\bullet)\neq 0\}$$

1. 称 $\mathcal{F}^\bullet\in {}^pD^{\leq 0}(X)$，如果 $\dim(\operatorname{supp}^m\mathcal{F}^\bullet)<k,\forall k\in\mathbb{N},m\in\mathbb{Z},m>p(2k)$

2. 称 $\mathcal{F}^\bullet\in {}^pD^{\geq 0}(X)$，如果 $\dim(\operatorname{cosupp}^m\mathcal{F}^\bullet)<k,\forall k\in\mathbb{N},m\in\mathbb{Z},-m>p^*(2k)$

这构成了一个非退化的 t-结构，记其心为 $Perv(X)$，其对象称为偏屈层。

注记. 一种理解偏屈层的方法是其中的对象是随着不同的维数粘结起来的层，并且这些层的同调行为也跟随着底空间维数变动。

定义 3.15 (中间扩张)**.** 给定 $U\subseteq X$ 使得 $U\in\mathcal{S}$, 记嵌入 $j:U\to X$。给定偏屈层 $\mathcal{G}^\bullet\in Perv(U)$，称其中间扩张为满足如下条件的唯一的偏屈层 $\mathcal{F}^\bullet\in Perv(X,p)$，记之为 $j_{!*}\mathcal{G}^\bullet$。

1. $\mathcal{F}^\bullet$ 是 $\mathcal{G}^\bullet$ 扩张：$j^{-1}\mathcal{F}^\bullet\simeq\mathcal{G}^\bullet$

2. $\mathcal{F}^\bullet$ 是态射 ${}^pj_!\mathcal{G}^\bullet\to{}^p\mathcal{F}^\bullet\to{}^pj_*\mathcal{G}^\bullet$ 在 $Perv(X)$ 中的像，即上述给出了满单分解。

其中 ${}^pj_*$ 是指对 j_* 取偏屈 t-结构截断 τ_0，此态射的存在性来源于伴随 ${}^pj_!\mathcal{G}^\bullet\to{}^p\mathcal{F}^\bullet\to{}^pj_*\mathcal{G}^\bullet$ 以及偏屈层取截断与取标准 t-结构截断相符。

注记. 中间扩张应当理解为偏屈层的粘合，事实上若取 $Z=X-U$ 以及嵌入 $i:Z\to X$，则有

$$i^*\mathcal{F}^\bullet\in{}^pD^{\leq -1}(Z)$$

$$i^!\mathcal{F}^\bullet\in{}^pD^{\geq 1}(Z)$$

的确，前推和反常前推可以分别理解为最大和最小的拉回（回忆开集范畴上的层时这真正变为左/右 Kan 扩张）。中间扩张应当理解为尊重 Z 上的划分结构，并随 Z 的每个部分一同改变其同调行为。

上述直觉在如下结果中得到精确描述。

命题 3.16 (Deligne)**.** 记 U_m 为全体 $S \in \mathcal{S}$ 使得 $p(S) \leq m$ 的并，因此 U_m 是开的可构造集。记 $j_k : U_{k-1} \to U_k$ 为嵌入，并选取 N 使得 $p(k) \leq N, \forall k \in 2\mathbb{N}$，即此时 $U_N = X$。再记 $j : U_m \to X$，$\mathcal{G}^\bullet$ 为 U_m 上偏屈层，则：

$$j_{!*}\mathcal{G}^\bullet = (\tau_{\leq N-1}Rj_{N*})(\tau_{\leq N-2}Rj_{(N-1)*})\cdots(\tau_{\leq m}Rj_{(m+1)*})\mathcal{G}^\bullet$$

其中 $\tau_{\leq}$ 是对偏屈 t-结构的截断。

偏屈层展现出最重要的性质就是其同调行为跟随底空间维数变化，而这恰好是使一般空间（不等维数的流形、代数簇）上 Poincare 对偶成立所需要的关键性质！

定义 3.17 (相交上同调)**.** 给定复代数簇 X 以及一个光滑稠密开集 U，嵌入 $j : U \to X$，U 上局部系 $\mathcal{L}$（自然是偏屈层，因为 U 光滑），定义相交复形 $IC_X(\mathcal{L}) = j_{!*}\mathcal{L}[n]$，相交上同调

$$IH^{n+i}(X, \mathcal{L}) = \mathbb{H}^i(X, IC_X(\mathcal{L}))$$

更一般地，对于光滑子簇 V，记 $IC_{\bar{V}}(\mathcal{L})$ 为将 $\bar{V}$ 上相交复形推前到 X 上得到的复形。

自然，我们应当期待常系数相交上同调上存在 Poincare 对偶，事实上的确如此。更一般地，对于来自 Hodge 结构的局部系数相交上同调，其上存在 Hodge 结构。

定义 3.18 (Hodge 结构变异)**.** 代数闭域 k 上概形 S 上权 w Hodge 结构变异是指 $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_k, \mathcal{F}^\bullet)$，其中 $\mathcal{V}_k$ 是一局部常值有限生成 k-模层，称为该 Hodge 结构的底层局部系，$\mathcal{F}^\bullet$ 是 $\mathcal{V}_k \otimes_k \mathcal{O}_S$ 的下降滤过，使得：

1. Griffiths 横截性：$\mathcal{V}_k \otimes_k \mathcal{O}_S$ 上平坦联络 $\nabla(v \otimes f) = v \otimes df$ 满足 $\nabla(\mathcal{F}^p) \subseteq \mathcal{F}^{p-1} \otimes \Omega^1_{S/k}$
2. 逐纤维 Hodge 结构：在每个 k 点 s，$(\mathcal{V}_{k,s}, \mathcal{F}^\bullet(s))$ 都给出了权 w 的 Hodge 结构。

更进一步称这个 Hodge 结构变异是极化的，如果存在平坦双线性型 $V_k \otimes V_k \to k_S$ 使得其在每个 k 点纤维上诱导了 Hodge 结构的极化。

一个重要的课题是研究偏屈层、相交上同调和 Hodge 结构之间的互动。特别地，在 Eichler-Shimura 同构的背景下，这一分解应当理解为相交上同调之上的 Hodge 结构。具体来说有如下结果：

定理 3.19 (Zucker-Saito)**.** *给定复射影簇 X，光滑稠密开集 U，嵌入 $j : U \to X$，U 上来自权 w Hodge 结构变异的局部系 $\mathcal{L}$，那么 $H^i(X, j_*\mathcal{L})$ 携带有权 $(i+k)$ 的纯 Hodge 结构。*

特别地，在下一命题的情况下利用 D-模上述 Hodge 结构可以精确写出。局部系 $j_{!*}\mathcal{L}$ 产出一 D-模 $\tilde{\mathcal{L}}$，则我们有其对应的 de Rham 复形 $DR_U(\tilde{\mathcal{L}}) = \Omega^\bullet_U \otimes \mathcal{L}[n]$。

这一 de Rham 复形上携带着滤过 $F^p DR_U(\tilde{\mathcal{L}}) = F^p\tilde{\mathcal{L}} \to \Omega^1_X \otimes F^{p-1}\tilde{\mathcal{L}}$，当然细心者应当已然注意到这和我们建立 Eichler-Shimura 同构中选取滤过的相似性。另一方面 Riemann-Hilbert 让我们能同时谈论 D-模上同调和局部系上同调，上述 de Rham 复形上同调的确诱导了局部系上同调上的 Hodge 结构。

现在我们指出具体到 Eichler-Shimura 同构背景下，前述理论如何生效。

命题 3.20. *X 是复 n-维代数簇，$j: U \hookrightarrow X$ 是一个光滑开集并且 $X - U$ 是若干孤立点。$\mathcal{L}$ 是 U 上的局部系，那么*

$$j_{!*}(\mathcal{L}[1]) = (j_*\mathcal{L})[1]$$

证明. 假设 $\dim_{\mathbb{C}} X = n$，那么我们有 $U_{-1} = U, U_0 = X, N = 0$。于是由 Deligne 公式，

$$j_{!*}(\mathcal{L}[1]) = (\tau_{\leq -1} Rj_{0*})\mathcal{L}[1]$$

$$= (\tau_{\leq 0} Rj_*\mathcal{L})[1] = (j_*\mathcal{L})[1]$$

□

因此 Eichler-Shimura 同构中出现的上同调实际上就是局部系 $R^1\pi_*\mathbb{C}_Y = R^1\pi_*\mathcal{H}^1_{dR}$ 给出的相交上同调，因此这实际上确实是一个 Hodge 结构变异，极化结构来自经典复几何。以上给出了相交上同调和 Hodge 结构观点的 Eichler-Shimura 同构。

4 Deligne-Shimura 构造

4.1 Hecke 算子

首先是相对较为简明的菱形算子：

定义 4.1 (菱形算子)**.** 给定 $d \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$，定义 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ 在函子 $\mathcal{M}_1(N)$ 上的作用为 $(E, \alpha) \mapsto (E, d \cdot \alpha)$，自然地它诱导了 $Y_1(N) \to Y_1(N)$ 进而在上同调上给出了拉回映射。菱形算子 $\langle d \rangle$（作用在上同调上时记为 $\langle d \rangle^*$）定义为其在 $S_k(\Gamma_1(N))$ 或者 $\mathrm{Im}[H^1_c(Y_1(N), Sym^k R^1\pi_*A) \to H^1(Y_1(N), Sym^k R^1\pi_*A)]$ 上的作用，前者的情况确是经典的菱形算子。

回顾第 2.1 节，我们始终固定一正整数 $N \geq 5$，并考虑如下推-拉图表：

$$\begin{tikzcd} X_1(N)_{\mathbb{Z}[1/Np]} & X_1(N,p) \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & X_1(N)_{\mathbb{Z}[1/Np]} \\ (E, \alpha) & (E, \alpha, C) \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & (E/C, \alpha) \end{tikzcd}$$

我们使用上同调的观点定义如下 Hecke 算子，所有重要信息不外乎如下图表：

$$\begin{tikzcd} & \pi_1^*\mathcal{E} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dl] \arrow[dr, "\pi_{\pi_1}"] & & \pi_2^*\mathcal{E} \arrow[dl, "\pi_{\pi_2}"'] \arrow[dr] & \\ \mathcal{E} \arrow[dr, "\pi"] & & Y_1(N,p) \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & \mathcal{E} \arrow[dl, "\pi"'] \\ & Y_1(N) & & Y_1(N) & \end{tikzcd}$$

其中 φ 由如下给出：$\pi_1^*\mathcal{E} \to \pi_2^*\mathcal{E}$ 在 $(\mathcal{E}, P, C) \in Y_1(N,p)$ 处的纤维分别是 $\mathcal{E} \to \mathcal{E}/C$，定义此映射为商同态即可。现在对左右两个方块做紧合基变换并利用 φ，就得到：

$$\tilde{\varphi}: \pi_2^* Sym^k R^1\pi^* A \xrightarrow{\sim} Sym^k R^1\pi_{\pi_2 *} A \xrightarrow{\varphi^*} Sym^k R^1\pi_{\pi_1^*} A \xrightarrow{\sim} \pi_1^* Sym^k R^1\pi_* A$$

其给出了算子 T_p：

定义 4.2. 算子 $T_p \in End(\tilde{H}^1(Y_1(N), Sym^k R^1\pi_*A))$ 为如下复合

$$\tilde{H}^1(Y_1(N), Sym^k R^1\pi_*A) \xrightarrow{\pi_2^*} \tilde{H}^1(Y_1(N,p), \pi_2^* Sym^k R^1\pi_*A)$$

$$\xrightarrow{\tilde{\varphi}} \tilde{H}^1(Y_1(N,p), \pi_1^* Sym^k R^1\pi_*A) \xrightarrow{\pi_{1*}} \tilde{H}^1(Y_1(N), Sym^k R^1\pi_*A)$$

其中我们使用记号 $\tilde{H}^1(Y,-) = \mathrm{Im}[H_c^1(Y,-) \to H^1(Y,-)]$ 这里 π_{1*} 是源自 $Y_1(N,p) \to Y_1(N)$ 是有限态射，从而有推前映射（逐纤维积分）。

与此同时，我们还有经典的 Hecke 算子 $T_p \in End(S_{k+2}(\Gamma_1(N)))$，它同样也是由如上拉回-推前映射给出的。具体写下构造可知其具有经典形式：

$$T_p f(\tau) = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} f(\frac{\tau+i}{p}) + \begin{cases} p^{k-1}\langle p\rangle f(p\tau) & p \nmid N \\ 0 & p \mid N \end{cases}$$

更进一步，透过 Eichler-Shimura，$T_p \oplus \bar{T}_p$ 在 $\tilde{H}^1(Y_1(N), Sym^k R^1\pi_*A)$ 上的作用正是最开始定义的 T_p。

最后我们定义 Fricke 对合算子，首先需要回忆 Weil 配对。

定义 4.3 (Weil 配对：复解析版本和代数版本)**.**

1. 考虑复环面 $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v)$，对于 $P, Q \in E[N]$ 为 E 上的 N-torsion 点，定义 $e_N(P,Q) = \exp(2\pi i N^{-1}\det\gamma)$，其中

$$\exists! \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \ s.t. \begin{matrix} P = a\cdot\frac{u}{N} + b\cdot\frac{v}{N} \bmod N \\ Q = c\cdot\frac{u}{N} + d\cdot\frac{v}{N} \bmod N \end{matrix}$$

2. 其代数几何推广如下：给定两个 N-torsion 点 $P, Q \in E[N]$，存在函数 $f = f_Q$ 使得 $div(f) = N\cdot(Q) - N\cdot(0)$。将其用椭圆曲线乘 N 作用 $[N]: E \to E$ 拉回，就有

$$div(f\circ[N]) = \sum_{R,[N]R=Q} N\cdot(R) - \sum_{S,[N]S=0} N\cdot(S)$$

任取 $Q' \in E[N^2]$ 使得 $[N]Q' = Q$，那么上述除子可以写为

$$div(f\circ[N]) = N\cdot\sum_{s\in E[N]}\big((Q'+S)-(Q)\big)$$

因此存在 g 使得 $g^N = f\circ[N]$。此时

$$g(X+P)^N = f([N]X+[N]P) = f([N]X) = g(X)^N$$

因此 $g(X+P)/g(X) \in \mu_N$，并且这个映射是常值，因为它不是到 μ_N 的满射。定义

$$e_N(P,Q) = \frac{g_Q(X+P)}{g_Q(X)} \in \mu_N$$

定义 4.4. 考虑 L 为 $\mathbb{Z}[1/Nl]$ 代数，$\zeta \in L^\times$ 为 N 阶元。那么 $Y_1(N)$ 基变换到 L 上后就有 w_ζ 的作用 $(E,\alpha) \mapsto (E/\alpha, \alpha' \bmod \alpha)$，这里 α' 的选取要求 $e_N(\alpha,\alpha') = \zeta$。其导出了 $Y_1(N)$ 到自身的映射，再一次地其在上同调上的拉回给出了

$$w_\zeta^* \in End(\tilde{H}^1(Y_1(N)_L, Sym^k R^1\pi_*A))$$

其与经典 Fricke 对合的联系如下：$W_N \oplus \bar{W}_N$ 透过 Eichler-Shimura 在 $\tilde{H}^1(Y_1(N)_L, Sym^k R^1\pi_*A)$ 上的作用是 $i^{k+2}N^{-k/2}w_{\zeta^*}$。

注记. 菱形算子可用算子 T_p 表出：

$$\langle p\rangle = p^{1-k}(T_{p^2} - T_p^2)$$

作为推论有形式级数

推论 4.5 (Hecke 算子的 Euler 乘积).

$$\sum_{n\geq 1} T_n n^{-s} = \prod_{p:prime} \frac{1}{1 - T_p p^{-s} + \langle p\rangle p^{k-1}\cdot p^{-2s}}$$

证明. 检查两侧系数，首先问题归约到 $\sum_{e=0}^{\infty} T_{p^e} p^{-es} = \dfrac{1}{1 - T_p p^{-s} + \langle p\rangle p^{k-1}\cdot p^{-2s}}$，展开并检查系数知只需证明

$$T_{p^{e+1}} - T_p T_{p^e} + \langle p\rangle p^{k-1} T_{p^{e-1}} = 0$$

□

接下来自然继续研究 Hecke 代数：

定义 4.6. 定义 $T_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[T_n, n\in\mathbb{N}, \langle d\rangle, d\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times] \subseteq End(S_k(\Gamma_1(N)))$，对于一般的交换环 A，则自然地定义其基变换 $T_A = T_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} A$。

定义 4.7. 称模形式 $f\in M_k(\Gamma_1(N))$ 是 Hecke 特征形式，如果其为算子族 $T_{\mathbb{Z}}$ 的公共特征向量。称其为正规化 Hecke 特征形式，如果 $a_1(f)=1$。(注意 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ & 1\end{pmatrix}\in\Gamma_1(N)$，因此 Fourier 展开的 q 可以选取为 $q=e^{2\pi i\tau}$。

注记. 对于正规化 Hecke 特征形式，由于诸 $\langle d\rangle$ 的作用实质上为 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ 的一个 (酉，若引入 Petersson 内积：其透过 Eichler-Shimura 同构后不过是 Hodge 结构的自然极化 $\int \alpha\wedge\bar{\beta}$) 表示。因此有特征分解 $S_k = \oplus_\chi S_{k,\chi}$，其中 $S_{k,\chi}$ 指使得 $\langle d\rangle f = \chi(d) f$，$\chi:(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{C}^\times$ 成立者。

自然：特征形式一定落入某个特征子空间中。

引理 4.8. $f=\sum_{n\geq 0} a_n(f) q^n$，则

$$a_m(T_n(f)) = \sum_{d\mid gcd(n,m)} d^{k-1} a_{nm/d^2}(\langle d\rangle f)$$

定理 4.9. *定义 $\mathbb{C}$-双线性型*

$$T_{\mathbb{C}}\times S_{k+2}(\Gamma_1(N)) \to \mathbb{C} : (T,f)\mapsto a_1(Tf)$$

该双线性型非退化，从而诱导了同构 $\psi: S_{k+2}(\Gamma_1(N))\to \mathrm{Hom}(T_{\mathbb{C}},\mathbb{C})$。特别地 f 是正规化 Hecke 特征形式，如果对应的 $\psi(f)\in\mathrm{Hom}(T_{\mathbb{C}},\mathbb{C})$ 更进一步是环同态。

证明. 先证非退化性，若 f 使得 $\forall T\in T_{\mathbb{Z}}, a_1(Tf)=0$，则由前一引理，注意 $a_n(f)=a_1(T_n f)=0$，从而 $f=0$。若 $T\in T_{\mathbb{C}}$ 使得 $\forall f, a_1(Tf)=0$，则

$$a_n(Tf) = a_1(T_n T f) = a_1(T T_n f) = 0$$

从而 $Tf=0$，由下一引理就说明了结果。

现在如果 f 是正规化 Hecke 特征形式，则 $\psi(f)$ 作用在 T 上就是 $a_1(Tf)$，这就是 f 对 T 的特征值：$Tf=\lambda f, a_1(Tf)=\lambda a_1(f)=\lambda$，从而是环同态。反之如果其为环同态，那么 $a_1(f)=a_1(\mathrm{Id}\cdot f)=1$。于是：

$$a_n(Tf)=a_1(T_nTf)=\psi(f)(T)\cdot\psi(f)(T_n)=\psi(f)(T)\cdot a_n(f)$$

因此 $Tf=\psi(f)(T)\cdot f$，从而完成证明。 □

最后处理忠实性：

引理 4.10. *记号同前，若 $T\in T_{\mathbb{C}}$ 使得 $Tf=0,\forall f$，则 $T=0$。*

证明. 我们简述论证如下，取“有理模形式”$S_{k+2}(\Gamma_1(N);\mathbb{Q})\subseteq S_{k+2}(\Gamma_1(N))$ 使得

$$S_{k+2}(\Gamma_1(N);\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}\cong S_{k+2}(\Gamma_1(N))$$

这可以通过更改 Eichler-Shimura 同构的右端系数得到。由于 Hecke 算子都是通过层上同调的推-拉完成定义，自然 $T_{\mathbb{Z}}$ 保持 $S_{k+2}(\Gamma_1(N);\mathbb{Q})$。因此我们有单射

$$T_{\mathbb{Z}}\to End_{\mathbb{Q}}(S_{k+2}(\Gamma_1(N);\mathbb{Q}))$$

然而右侧是无挠可除 $\mathbb{Z}$-模，因此单射立刻升级为 $T_{\mathbb{Q}}\to End_{\mathbb{Q}}(S_{k+2}(\Gamma_1(N);\mathbb{Q}))$，而 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}\to\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}$ 忠实平坦，基变换到 $\mathbb{C}$ 就说明一切。 □

作为推论，我们得到 Hecke 代数和模形式的自对偶性：

定理 4.11. *$S_{k+2}(\Gamma_1(N)),S_{k+2}(\Gamma_1(N))^\vee$ 都是秩 1 自由 $T_{\mathbb{C}}$-模，从而 $\tilde{H}^1(Y_1(N),Sym^kR^1\pi_*\mathbb{C})$ 秩 2 自由。特别地，这说明 $S_{k+2}(\Gamma_1(N)),T_{\mathbb{C}}$ 都是自对偶的。*

证明. 一切论述都依赖于前述论述中的“有理模形式”，其余自明。 □

因此我们得到主要命题

定理 4.12. *$f\in S_{k+2}(\Gamma_1(N))$ 是正规化 Hecke 特征形式，K_f 为 $\{a_n(f),n\geq 1\}$ 在 $\mathbb{C}$ 中生成的子域，则每个 $a_n(f)$ 都是代数整数，并且*

1. *$K_f/\mathbb{Q}$ 是有限扩张*
2. *$T_{\mathbb{Z}}\hookrightarrow T_{\mathbb{C}}\xrightarrow{\psi_f}\mathbb{C}$ 的像含于 K_f*
3. *K_f 包含 f 对每个 $\langle d\rangle$ 的特征值*

证明. 由于 $T_{\mathbb{Z}}$ 单地嵌入到 $End_{\mathbb{Z}}(S_{k+2}(\Gamma_1(N)))$，进而通过共轭作用 $T\oplus\bar{T}$ 给出单嵌入

$$T_{\mathbb{Z}}\hookrightarrow End_{\mathbb{Z}}(\tilde{H}^1(Y_1(N),Sym^kR^1\pi_*\mathbb{C}))$$

然而 $T_{\mathbb{Z}}$ 作用保持 $\tilde{H}^1(Y_1(N),Sym^kR^1\pi_*\mathbb{C})$（再一次地，因为这些 Hecke 算子都通过层上同调的推-拉完成定义），因此上述单嵌入下降为

$$T_{\mathbb{Z}}\hookrightarrow End_{\mathbb{Z}}(\tilde{H}^1(Y_1(N),Sym^kR^1\pi_*\mathbb{Z}))$$

然而后者是有限生成 $\mathbb{Z}$-模并且无挠，因此 $T_{\mathbb{Z}}$ 自然也是有限秩自由 $\mathbb{Z}$-模。

于是 $T_{\mathbb{Z}} \hookrightarrow T_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ 的像也是有限生成 $\mathbb{Z}$-模，从而生成了一个 $\mathbb{Q}$ 的有限扩张（注意 ψ_f 是环同态）。现在注意这个像实际上由 f 对算子 $T_n, \langle d\rangle$ 的特征值生成，因此包含所有 $a_n(f)$。

然而回忆菱形算子的等式 $\langle p\rangle = p^{1-k}(T_{p^2} - T_p^2)$，因此在观察 $\psi_f|_{T_{\mathbb{Z}}}$ 的像时菱形算子实际上没有贡献，因此其生成的有限扩张就是 K_f。 □

4.2 Galois 表示：动机

在真正着手构造模形式产生的 Galois 表示之前，我们先简单解释一下为何要考虑 Galois 表示以及我们对构造出来的 Galois 表示的一些期望。记 $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) = G_{\mathbb{Q}}$

一个动机是模性：我们已知椭圆曲线上存在一个相伴的 Galois 表示：

定义 4.13. 给定 $\mathbb{Q}$-上椭圆曲线 E 以及素数 ℓ，我们有逆向极限

$$\cdots \to E[\ell^3] \to E[\ell^2] \to E[\ell]$$

其中 $E[\ell^n]$ 是 $E_{\bar{\mathbb{Q}}}$ 上的 ℓ^n-torsion 点。定义 ℓ-进 Tate 模

$$T_\ell(E) = \varprojlim E[\ell^n]$$

注意 Galois 作用和椭圆曲线的 $\times\ell$ 作用交换，因此上述给出了

$$G_{\mathbb{Q}} \to \varprojlim Aut(E[\ell^n]) = GL_2(\mathbb{Z}_\ell)$$

进而升级成 $\mathbb{Q}_\ell^2$ 上的 Galois 表示，记为 $\rho_{E,\ell}$。

特别地，这一表示具有如下性质：

定理 4.14. *给定 $\mathbb{Q}$-上椭圆曲线 E，以及素数 p 使得 E 在其上有好约化，则对任何 $\ell \neq p$：*

$$\det(\rho_{E,\ell}(\mathrm{Frob}_p)) = p, \quad \mathrm{tr}(\rho_{E,\ell}(\mathrm{Frob}_p)) = p + 1 - \#E(\mathbb{F}_p)$$

注记. $\mathbb{Q}$-上椭圆曲线 E 在 p 上有

1. 好约化：如果存在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上椭圆曲线 $E_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 使得其基变换至 $\mathbb{Q}$ 为 E，此时模 p 约化就是 $E_{\mathbb{Z}_{(p)}} \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{F}_p$
2. 稳定约化：如果存在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上广义椭圆曲线 $E_{\mathbb{Z}_{(p)}}$ 使得其基变换至 $\mathbb{Q}$ 为 E。

回忆椭圆曲线的 L-函数分解为若干携带 $a_p = p + 1 - \#E(\mathbb{F}_p)$ 系数的多项式之积：

定义 4.15 (椭圆曲线的 L-函数)**.**

$$L(E,s) = \prod_{\text{p:good}} \frac{1}{1 - a_p(E)p^{-s} + p\cdot p^{-2s}} \times \prod_{\text{p:bad}} \frac{1}{1 - a_p(E)p^{-s}}$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

（我们不详细讨论坏约化时 a_p 的定义）

Galois 表示的 L-函数

定义 4.16 (Artin L-函数)**.** 给定 Galois 表示 ρ，定义 Artin L-函数为：

$$L(\rho, s) = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{\det(1 - p^{-s}\rho(\text{Frob}_p))}$$

推论 4.17. *椭圆曲线的 L-函数与前述构造的 Galois 表示的 L-函数相同。*

以及模形式的 L-函数：

定义 4.18 (模形式的 L-函数)**.** 给定模形式 $f \in M(\Gamma_1(N))$，以及 Fourier 展开 $\sum_{n\geq 0} a_n(f)q^n$，定义其 L 函数为

$$L(s, f) = \sum_{n\geq 1} a_n(f)n^{-s}$$

正规化 Hecke 特征形式的 L 函数具有 Euler 乘积：

$$L(s, f) = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - a_p(f)p^{-s} + \chi(p)p^{k-1} \cdot p^{-2s}}$$

其中 $\chi(p)$ 为正规化 Hecke 特征形式所对应的特征 $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$。

因此从 L-函数作为桥梁的观点来看，链接椭圆曲线和模形式的证据可能能够在 Galois 表示中取到。特别地我们希望模形式构造出来的 Galois 表示有着和定理 4.14相似的性质。这一切回归到了如下著名图景：

$$\begin{tikzcd}
& \text{几何对象} \arrow[dr, "\text{平展上同调}"] & \\
\text{模形式} \arrow[ur, "\text{Scholl}"] \arrow[rr, "\text{Deligne-Shimura}"'] & & \text{2维}\ell\text{-进 Galois 表示}
\end{tikzcd}$$

特别地，我们前述展示的情况正是权 2 的情形：

$$\begin{tikzcd}
& \text{几何对象} \arrow[dr, "\ell\text{-torsion}"] & \\
\text{权 2 模形式} \arrow[ur, "\text{模曲线的 Jacobian}"] \arrow[rr, "\text{Deligne-Shimura}"'] & & \text{2维}\ell\text{-进 Galois 表示}
\end{tikzcd}$$

最后我们谈及一些这套理论在 1 维情形下的类比，此时一切退化到类域论：

命题 4.19. *$G_\mathbb{Q}$ 的 1 维 ℓ-进表示被如下特征生成：*

1. *ℓ-进分圆特征：* $G_\mathbb{Q} \to \varprojlim \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{\ell^n})/\mathbb{Q}) \to \varprojlim(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}_\ell^\times \subseteq \mathbb{Q}_\ell^\times$
2. *循环特征：* $G_\mathbb{Q} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}) \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Q}_\ell^\times$

证明. 只需证明这一特征穿过 $G_\mathbb{Q}$ 的 Abel 化，Kronecker-Weber 说明一切。 □

4.3 Galois 表示：构造

首先我们将一切都过渡到 ℓ-进的世界上，我们先来着手处理诸多上同调对象，转运这一切的是平展上同调的比较定理和各种基变换定理。我们首先引用如下基本结果：

定理 4.20 (Igusa). 固定正整数 N，以及素数使得 $p \nmid N$，那么存在 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上光滑紧合曲线 $X_1(N)_{\mathbb{Z}_{(p)}}$，使得

$$X_1(N)_{\mathbb{Z}_{(p)}} \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{Q} = X_1(N)_{\mathbb{Q}}$$

称 $X_1(N)_{\mathbb{Z}_{(p)}} \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{F}_p$ 为其模 p 约化。

因此我们现在可以任意讨论光滑曲线 $X_1(N)_{\mathbb{F}_p}, p \nmid N$。由此我们考虑如下 ℓ-进层

定义 4.21. 定义

$$\mathscr{F}_\ell := \mathrm{Im}[R^1 a_!(Sym^k R^1 \pi_* \mathbb{Q}_\ell) \to R^1 a_*(Sym^k R^1 \pi_* \mathbb{Q}_\ell)]$$

为 Spec $\mathbb{Z}[1/N\ell]$ 上的平展层，其中 $a : X_1(N)_{\mathbb{Z}[1/N\ell]} \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[1/N\ell]$。

由于 $X_1(N)_{\mathbb{Z}_{(p)}} \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}_{(p)}$ 是光滑的，那么光滑基变换和紧支上同调的基变换 [Stacks, Lemma 63.12.2] 共同说明：

命题 4.22. $\mathscr{F}_\ell$ 在几何点 $\bar{\mathbb{F}}_p$ 处的几何纤维是

$$\mathscr{F}_{\ell,p} := \mathrm{Im}[H^1_{c,\acute{e}t}(X_1(N)_{\bar{\mathbb{F}}_p}, Sym^k R^1 \pi_* \mathbb{Q}_\ell) \to H^1_{\acute{e}t}(X_1(N)_{\bar{\mathbb{F}}_p}, Sym^k R^1 \pi_* \mathbb{Q}_\ell)]$$

在一般点 $\bar{\mathbb{Q}}$ 处的几何纤维是

$$\mathscr{F}_{\ell,\mathbb{Q}} = \mathrm{Im}[H^1_{c,\acute{e}t}(X_1(N)_{\bar{\mathbb{Q}}}, Sym^k R^1 \pi_* \mathbb{Q}_\ell) \to H^1_{\acute{e}t}(X_1(N)_{\bar{\mathbb{Q}}}, Sym^k R^1 \pi_* \mathbb{Q}_\ell)]$$

特别地，光滑基变换和平展-奇异比较定理说明了这一几何纤维实质上和复流形 $X_1(N)^{an}$ 上的层上同调相符。

定理 4.23 ([SGA4-3, Chapter IX, 2.11]). $\mathscr{F}_\ell$ 是 $\mathbb{Q}_\ell$-（平展）局部系。特别地：

$$\mathscr{F}_{\ell,p} \to \mathscr{F}_{\ell,\mathbb{Q}}$$

是同构。记 $X = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[1/N\ell]$，这个映射由

$$\mathscr{F}_{\ell,p} = \Gamma(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,p,\acute{e}t}, i_p^* \mathscr{F}_\ell) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,\mathbb{Q},\acute{e}t}, i_{\mathbb{Q}}^* \mathscr{F}_\ell)$$

配合上

$$\mathcal{O}_{X,p,\acute{e}t} = \mathbb{Z}_{(p)}^{sh} \to \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{sh} = \mathcal{O}_{X,\mathbb{Q},\acute{e}t}$$

注记. 综上所述，$\mathscr{F}_\ell$ 实质上纤维本质上都与 $\tilde{H}^1(Y_1(N), Sym^k R^1 \pi_* \mathbb{Q}_\ell)$ 相符，但是其在 $\bar{\mathbb{F}}_p$ 和 $\bar{\mathbb{Q}}$ 上的纤维使得其更进一步携带有 Galois 作用。从此之后通过选定嵌入和茎之间的同构，我们混淆 $G_{\mathbb{Q}}, G_{\mathbb{Q}_p}, G_{\mathbb{F}_p}$ 在各个茎上的作用。注意 $G_{\mathbb{F}_p}$ 到 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 的拉回并不典范，总之依赖这里具体选定的同构。

然后我们需要将前文对 Hecke 代数的讨论过渡到 ℓ-进的情况，我们推广定理 4.11

定理 4.24 (ℓ-进版本的定理 4.11). 记 $T_\ell = T_{\mathbb{Q}_\ell} = T_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$，则

$$\mathscr{F}_{\ell,\mathbb{Q}} = T_\ell^{\oplus 2}, \quad T_\ell \cong T_\ell^\vee$$

证明. 无妨考虑任意特征 0 域 k 上的情况，T_k 是有限维 k-代数，从而是 Artin 环，因此自由等价于局部自由且常秩，于是忠实平坦下降得到 $\mathbb{Q}$ 上就回到了和定理 4.11相同的情况。 □

我们下面着手定义 Galois 表示。现在 $G_{\mathbb{Q}}$ 作用在 $\mathscr{F}_{\ell,\mathbb{Q}}$ 上，其自然和 T_ℓ 作用交换，因此给出了表示 $\check{\rho}_\ell : G_{\mathbb{Q}} \to GL_{T_\ell}(\mathscr{F}_{\ell,\mathbb{Q}})$。

定义 4.25 (模形式的 Galois 表示). 选定正规化 Hecke 特征形式 $f \in S_{k+2}(\Gamma_1(N))$，定理 4.12说明其给出了环同态

$$\psi_f : T_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$$

并且其像是有限扩张 $K_f/\mathbb{Q}$。

回忆 $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}} K_f = \prod_{\lambda \text{ over } \ell} \widehat{K_{f,\lambda}}$，以及 $\psi_f : T_{\mathbb{Q}} \to K_f$，因此选定好一个素位 λ，就有 $T_\ell \twoheadrightarrow \widehat{K_{f,\lambda}}$。

现在将 2-维线性空间 $\mathscr{F}_{\ell,\mathbb{Q}}$ 基变换到 $K_{f,\lambda}$ 得到

$$V_{f,\lambda}^\vee = \mathscr{F}_{\ell,\mathbb{Q}} \otimes_{T_\ell} K_{f,\lambda}$$

于是 Galois 表示 $\check{\rho}_\ell$ 通过基变换就变为

$$\check{\rho}_{f,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_{\widehat{K_{f,\lambda}}}(V_{f,\lambda}^\vee) \cong GL(2, \widehat{K_{f,\lambda}})$$

最后，取逆步表示（$\rho(g) = \check{\rho}(g^{-1})^T$）产出了 2 维 Galois 表示

$$\rho_{f,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_{\widehat{K_{f,\lambda}}}(V_{f,\lambda}) \cong GL(2, \widehat{K_{f,\lambda}})$$

4.4 Eichler-Shimura 同余关系

首先回忆 T_p 的拉-变-推定义，我们实质上给出的是 $(E,\alpha) \mapsto \sum_D (E/D, (\alpha+D)/D)$，这里 D 取遍所有与 α 不交的 p-阶子群：当然我们不能精确说明什么是模曲线上的加法，但是上同调间映射 T_p 的确能够分解为每个 D 产生的映射 $(E,\alpha) \mapsto (E/D, (\alpha+D)/D)$ 的拉回映射再求和。

以上正是 Eichler-Shimura 同余关系的直观，我们具体叙述如下。首先进入特征 p 的世界时我们应当避免直接谈论 “p 阶-子群”。

定义 4.26. 考虑几何自同构 $\mathrm{Frob}_p^{-1} \in G_{\mathbb{F}_p}$，其诱导了 $\mathscr{F}_{\ell,p}$ 上的作用 F，称为 Frobenius 对应。其对应模曲线上的行为正是

$$F_E : (E^{(p)}, \alpha^{(p)}) \mapsto (E, \alpha), \quad E^{(p)} = E \times_{\mathbb{F}_p, \mathrm{Frob}_{\mathbb{F}_p}^{-1}} \mathbb{F}_p$$

（即算术 Frobenius 的逆）反过来定义其伴随

$$V_E : (E^{(p)}, p\alpha^{(p)}) \mapsto (E, \alpha)$$

定义其在 $\mathscr{F}_{\ell,p}$ 上的作用为

$$V : \tilde{H}^1(Y_1(N)_{\mathbb{F}_p}, Sym^k R^1\pi_*\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{V_E^*} \tilde{H}^1(Y_1(N)_{\mathbb{F}_p}, Sym^k(R^1\pi_*^{(p)}\mathbb{Q}_\ell)) \xrightarrow{E_*} \tilde{H}^1(Y_1(N)_{\mathbb{F}_p}, Sym^k R^1\pi_*\mathbb{Q}_\ell)$$

接下来我们使用下标 $_E$ 表示纤维上（或等价地说，层）的态射，而不带下标 E 则指代整个模空间（连同其上层）的变换。

我们需要提示 V 的作用实质上是顺如下图表的上侧做基变换：

$$\begin{tikzcd}
(E, p\alpha) \arrow[d, "\pi"'] & (E^{(p)}, p\alpha^{(p)}) \arrow[l] \arrow[r, "V_E"] \arrow[d, "\pi^{(p)}"'] & (E, \alpha) \arrow[dl, "\pi"] \\
Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} & Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} \arrow[l, "F"] &
\end{tikzcd}$$

以及 F 的作用：

$$\begin{tikzcd}
(E, \alpha) \arrow[r] \arrow[dr, "\pi"'] & (E^{(p)}, \alpha^{(p)}) = F^*(E, \alpha) \arrow[r] \arrow[d] & (E, \alpha) \arrow[d] \\
& Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} \arrow[r, "F"'] & Y_1(N)_{\mathbb{F}_p}
\end{tikzcd}$$

引理 4.27. *在 $End(\mathscr{F}_{\ell,p})$ 中，$FV = VF = p^{k+1}$*

证明.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[d] & E^{(p)} \arrow[r, "V_E"] \arrow[dr] & E \arrow[r, "\mathrm{Frob}_E"] \arrow[d] & E^{(p)} \arrow[r] \arrow[dl] & E \arrow[d] \\
Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} & & Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} \arrow[ll, "F"] \arrow[rr, "F"'] & & Y_1(N)_{\mathbb{F}_p}
\end{tikzcd}$$

对照此图和前述图表计算

$$VF = (F_* V_E^*)(F_E^* F^*) = F_*(V_E F_E)^* F^* = p^k \cdot F_* F^* = p^{k+1}$$

其中第二个因子是因为注意上图右侧方块，p^k 来自 $(V_E F_E)^*$ 在 $R^1\pi_*\mathbb{Q}_\ell$ 下是乘 p，$F_*F^* = p$ 则是因为 F 的次数是 p。 □

命题 4.28. *在平展上同调的 Poincare 对偶意义下 F, V 互为伴随，这里我们不加说明地使用平展上同调上的 Poincare 对偶：$\mathscr{F}_{\ell,p} \times \mathscr{F}_{\ell,p} \to \mathbb{Q}_\ell(-k-1)$。*

证明. 由 Tate twist:

$$\langle Fx, y\rangle = p^{k+1}\langle \mathrm{Frob}_p Fx, \mathrm{Frob}_p y\rangle$$

然而回忆 F 的定义就是 Frob_p 作用的逆，因此上式

$$= \left\langle x, p^{k+1}F^{-1}y\right\rangle = \langle x, Vy\rangle$$

□

接下来则是将其与 T_p 挂钩：首先我们注意到在特征 p 上工作使得我们无需关注 $Y_1(N,p)$ 中的 p-阶子群，一些关于 Hasse 不变量的讨论保证我们可以随意的将特征 0 情况的直观降至特征 p，具体论述参见 [De71, Section 4]。

现在注意 F_E^{-1}, V_E 分别诱导了 $\Phi_1, \Phi_2 : Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} \to Y_1(N,p)_{\mathbb{F}_p}$，从而产出了

$$\Phi : Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} \coprod Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} \to Y_1(N,p)_{\mathbb{F}_p}$$

我们希望将定义 T_p 的上同调对应拉至另外一个分解上计算，这自然引导我们考虑如下纯追图结果：

引理 4.29. *考虑交换图*

$$\begin{tikzcd}
& Z_2 \arrow[dl, "x_2"'] \arrow[dr, "y_2"] & \\
X & & Y \\
& Z_1 \arrow[ul, "x_1"] \arrow[ur, "y_1"'] \arrow[uu, "f"] &
\end{tikzcd}$$

以及 X, Y 上的层 $\mathscr{F}, \mathscr{G}$，层态射

$$z_1 : y_1^*\mathscr{G} \to x_1^*\mathscr{F}, \quad z_2 : y_2^*\mathscr{G} \to x_2^*\mathscr{F}$$

并设有交换性 $f^*z_2 = z_1$。

同时我们还假定如下技术条件：y_1, y_2 紧合，x_1, x_2 有限平坦，对于任何 Z_2 的几何点 $s \to Z_2$，其在 $x_2^{-1}(x_2(s))$ 中的重数与 s 在 f 下的原像在 $x_1^{-1}(x_1(f^{-1}(s)))$ 中相同。那么如下图表交换

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}^i(Y,\mathscr{G}) \arrow[r, "y_1^*"] \arrow[d, equal] & \tilde{H}^i(Z_1,\mathscr{G}) \arrow[r, "z_1"] & \tilde{H}^i(Z_1,\mathscr{F}) \arrow[r, "x_{1*}"] & \tilde{H}^i(X,\mathscr{F}) \arrow[d, equal] \\
\tilde{H}^i(Y,\mathscr{G}) \arrow[r, "y_2^*"] & \tilde{H}^i(Z_2,\mathscr{G}) \arrow[r, "z_2"] \arrow[u] & \tilde{H}^i(Z_2,\mathscr{F}) \arrow[r, "z_{2*}"] \arrow[u] & \tilde{H}^i(X,\mathscr{F})
\end{tikzcd}$$

现在我们对图表

$$\begin{tikzcd}
& Y_1(N,p)_{\mathbb{F}_p} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} & & Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} \\
& Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} \coprod Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu, "\Phi"] &
\end{tikzcd}$$

层 $\mathscr{F} = \mathscr{G} = R^1Sym^k\pi_*\mathbb{Q}_\ell$，以及 $z_2 = \varphi^*$（回忆 $\varphi : E \mapsto E/C$）应用前述引理，T_p 的计算遂由上侧路径转换为下侧路径计算。然而下侧的无交并使得我们可以转而分开计算两个拉回映射的和，其由如下给出：

$$\begin{tikzcd}
& (E,\alpha) \arrow[rr, "F_E^{-1}"'] \arrow[dl, dash, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr] & & (E^{(p)},\alpha^{(p)}) = F^*(E,\alpha) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(E,\alpha) \arrow[dr] & & Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} \arrow[dl, dash, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "F"'] & & (E,\alpha) \arrow[dl] \\
& Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} & & Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} &
\end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd}
(E,\alpha) \arrow[r] \arrow[dd] & (E,p\alpha) \arrow[dd] & (E^{(p)},p\alpha^{(p)}) \arrow[l, "F_E"'] \arrow[dd] \arrow[dr, "V_E"'] & & \\
& & & (E,\alpha) \arrow[dl] \arrow[dr, dash, "\mathrm{id}"] & \\
Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} \arrow[r, "\langle p \rangle"] & Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} & Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} \arrow[l, "F"'] \arrow[dr, dash, "\mathrm{id}"'] & & (E,\alpha) \arrow[dl] \\
& & & Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} &
\end{tikzcd}$$

然而这个分解的每一部分都是我们已经定义过的上同调算子的复合！因此我们终于得到了

定理 4.30 (Eichler-Shimura 同余关系). 在 $End(\mathscr{F}_{\ell,p})$ 中

$$T_p = F + \langle p \rangle^* V, \quad FV = VF = p^{k+1}$$

更进一步具体写下 *Fricke* 对合算子的定义还能够说明

$$(w_\zeta^*)^{-1} V w_\zeta^* = \langle d \rangle^* V$$

其中 ζ 是 $\bar{\mathbb{F}}_p$ 中任意 N 次本原单位根。

4.5 Galois 表示：性质

现在我们终于能够开始读取我们前述构造的 Galois 表示具有的性质了。

定理 4.31. 给定素数 $p \nmid N\ell$，其 *Frobenius* 对应 $F \in End_{T_\ell}(\mathscr{F}_{\ell,\mathbb{Q}})$ 的特征多项式为

$$X^2 - T_p X + \langle p \rangle p^{k+1} \in T_\ell[X]$$

证明. 由 Eichler-Shimura 同余关系：

$$(X - F)(X - \langle p \rangle V) = X^2 - T_p X + p^{k+1} \langle p \rangle$$

因此取 det 就有

$$\det(X - F) \det(X - \langle p \rangle V) = (X^2 - T_p X + p^{k+1} \langle p \rangle)^2$$

自然问题归结于 $\det(X - F) = \det(X - \langle p \rangle V)$，现在注意到平展上同调上 Poincare 对偶的双线性型 $\langle -, - \rangle_\ell$ 产出一新的 T_ℓ 上双线性型，定义为

$$[-, -]_\ell = \left\langle -, w_\zeta^* - \right\rangle_\ell$$

此时所有 $T \in T_\ell$ 关于 $[-, -]_\ell$ 均自伴，因此的确为 T_ℓ 上的双线性型：这是因为通过平展局部系的特殊化映射，问题立即归结到复解析的情况，进而归结到简单的复系数情况。而这一切就回到了初等的 Hecke 代数结果：

引理 4.32. 对于 $T \in T_{\mathbb{Z}}$，相对于 $S_{k+2}(\Gamma_1(N))$ 上的 *Petersson* 内积，T 的伴随为 $w_N T w_N^{-1}$。

于是我们有

$$[Fx, y]_\ell = \left\langle Fx, w_\zeta^* y \right\rangle_\ell = \langle x, V w \zeta^* y \rangle_\ell = [x, (w_\zeta^*)^{-1} V w_\zeta^* y]_\ell = [x, \langle p \rangle V y]_\ell$$

因此 $\langle p \rangle V$ 是 F 相对 $[-, -]_\ell$ 的转置，从而特征多项式相同，一切得证。 □

定理 4.33 (Deligne-Shimura). 给定正规化 *Hecke* 特征形式 $f = \sum_{n \geq 1} a_n(f) q^n \in S_{k+2}(\Gamma_1(N))$，假定其在菱形算子 $\langle d \rangle$ 下的作用由特征 $\chi_f : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to K_f^\times$ 给出，那么 *2* 维 *Galois* 表示 $\rho_{f,\lambda} : K_{\mathbb{Q}} \to GL(2, \widehat{K_f, \lambda})$ 满足：

1. 此 *Galois* 表示在 $N\ell$ 外非分歧：即对于 $p \nmid N\ell$，惯性群 I_p 在 ρ 下的像为 *0.*

2. *对于 $p \nmid N\ell$，$\rho_{f,\lambda}(Frob_p)$（自然只精确到共轭类）的特征多项式是*

$$X^2 - a_p(X) + \chi_f(p)p^{k+1} \in K_f[X]$$

3. *χ_ℓ 是 ℓ-进分圆特征，则 $\det \rho_{f,\lambda} = \chi_f \chi_\ell^{k+1}$。这里 $\chi_f : G_{\mathbb{Q}} \to K_f^\times$ 是指复合到 $G_{\mathbb{Q}} \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to K^\times$*

4. *复共轭 $c \in G_{\mathbb{Q}}$ 满足 $\det \rho_{f,\lambda}(c) = -1$*

证明. 1. 因为该表示来自 Spec $\mathbb{Z}[1/N\ell]$ 的局部系，自然惯性群不产生作用（考虑对应的 $\mathscr{F}_{\ell,p}$ 即可）

2. 注意 $\check{\rho}(\mathrm{Frob}_p^{-1})$ 和 $\rho(\mathrm{Frob}_p)$ 特征多项式相同，然而前者正是 F 做张量积 $- \otimes_{T_\ell} K_{f,\lambda}$ 得到，从而特征多项式是 $X^2 - a_p(f)X + \chi_f(p)p^{k+1}$。

3. 回忆代数数论中结论：

   定理 4.34 (Chebotarev, 弱形式). *$K/\mathbb{Q}$ 在有限素数集 S 外非分歧，则 $Frob_p, p \notin S$ 在 $Gal(K/\mathbb{Q})$ 中稠密。*

   由 Chebatarov 密度定理（弱形式）知，以及 Galois 表示在 $N\ell$ 素因子外非分歧知，只需检查上式对 Frob_p 成立。但这是因为

$$\det \rho_{f,\lambda}(\mathrm{Frob}_p) = \chi_f(p)p^{k+1} = \chi_f(\mathrm{Frob}_p)\chi_\ell^{k+1}(\mathrm{Frob}_p)$$

4. 有前一结果，立见 $\chi_f(c) = \chi_f(-1) = (-1)^{k+2}$，从而 $\det \rho_{f,\lambda}(c) = (-1)^{k+2}(-1)^{k+1} = -1$。 □

现在我们对比模形式 Galois 表示和椭圆曲线 Galois 表示的 L-函数：

推论 4.35. *模形式的 L-函数与其 Galois 表示的 L-函数相同。*

特别地，我们称椭圆曲线具有模性，如果存在 $f \in S_2(\Gamma_1(N_E))$（f 是新形式，N_E 是导子）以及 K_f 的赋值 $\lambda \mid \ell$，并且任取代数闭包 $K_{f,\lambda} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ 有：

$$\rho_{E,\ell} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \bar{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \rho_{f,\lambda} \otimes_{K_{f,\lambda}} \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

这就引向了 Fermat 大定理。

References

[De71] Pierre Deligne. “Formes modulaires et représentations ℓ-adiques”. fr. In: *Séminaire Bourbaki : vol. 1968/69, exposés 347-363*. Séminaire Bourbaki 11. talk:355. Springer-Verlag, 1971, pp. 139–172 (cit. on p. 21).

[DeRa73] P. Deligne and M. Rapoport. “Les Schémas de Modules de Courbes Elliptiques”. In: *Modular Functions of One Variable II*. Springer Berlin Heidelberg, 1973, pp. 143 316 (cit. on p. 4).

[LWW20] 李文威. *模形式初步*. 2020 (cit. on p. 7).

[SGA4-3] P. Deligne and M. Artin. *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas*. Springer Berlin Heidelberg, 1973. ISBN: 9783540381242. DOI: 10.1007/bfb0070714 (cit. on p. 19).

[Stacks] *Stacks Project* (cit. on p. 19).