$K(n)$-局部球的有理同伦群

2025 Spring

2025 年 4 月 15 日

目录

1 关于进制空间和解析环的一些评注

2 约化

回顾经典的 Devinatz-Hopkins 的结果：单位映射 $L_{K(n)}\mathbb{S}^0 \to E_n$ 是 $L_{K(n)}\mathbb{S}^0$ 的 pro-Galois 扩张，其中 Galois 群为 Morava 稳定化子群 $\mathbb{G}_n$。因此标准的 Galois 下降谱序列给出了谱序列

$$E_2^{st} \cong H^s_{cts}(\mathbb{G}_n, \pi_{-t}E_n) \implies \pi_{-t-s}L_{K(n)}\mathbb{S}^0$$

在计算 $L_{K(n)}\mathbb{S}^0$ 有理同伦群的过程中这个谱序列内部的计算并非困难之处，原因是这个谱序列相当退化。我们首先回顾对 $\mathbb{G}_n$ 的描述：它是形式群律 $\bar{\Gamma}_n$ 的自同构群对 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ 的扩张，其中 $\bar{\Gamma}_n$ 为 $\bar{\mathbb{F}}_p$ 上的高度 n 的形式群律。实际上 $\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{F}}_p}(\bar{\Gamma}_n) = \mathrm{End}_{\mathbb{F}_{p^n}}(\Gamma_n)$，于是这个自同构群就是 $\mathcal{O}_D^\times$，其中 $D = \mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{F}_{p^n}}(\Gamma_n)$。

另一方面，经典的形式群律计算指出 $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_{p^n}}(\Gamma_n)$ 就是由 $\omega(x)=\omega x, \xi(x)=x^p$ 生成的，其中 ω 指本原 (p^n-1)-次单位根在剩余类域 $\mathbb{F}_{p^n}$ 中的约化。即：

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}_p^n}(\Gamma_n)\cong W(\mathbb{F}_{p^n})\langle\xi\rangle/(\xi\omega-\omega^p\xi,\xi^n-p)$$

命题 2.1. $\forall t\neq 0, s\in\mathbb{Z}, H^s_{cts}(\mathbb{G}_n,\pi_tE_n\otimes\mathbb{Q})=0$

证明. $\mathbb{G}_n$ 坐落在短正合列

$$0\to\mathcal{O}_D^\times\to\mathbb{G}_n\to\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)\to 0$$

中。于是由 Lyndon-Hochschild-Serre 谱序列，我们只需证明 $H^*(\mathcal{O}_D^\times,\mathbb{Q}\otimes\pi_tE_n)=0$。

我们还需要清楚 $\mathbb{G}_n$ 在 $(E_n)_*$ 上的作用。在 $\mathcal{O}_D^\times$ 的中心上这是已知的：注意由定义 $\mathcal{O}_D^\times$ 的中心是 $\mathbb{Z}_p^\times$，手动检查形式群律的作用知 $(1+p)\in\mathbb{Z}_p^\times$ 在 $(E_n)_t$ 上的作用是乘以 $(1+p)^t$：参见 [HHT, Section 5.3.2.2]。特别地，$1+p\in\mathbb{Z}_p\subseteq\mathbb{Z}_p^\times$，因此我们再一次有 Lyndon-Hochschild-Serre 谱序列，问题最终化归到计算 $H^q_{cts}(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Q}\otimes\pi_tE_n)$ 上。

然而 $\mathbb{Z}_p$ 的连续上同调被复形 $\mathbb{Q}\otimes\pi_tE_n\xrightarrow{\sigma-1}\mathbb{Q}\otimes\pi_tE_n$ 表出。其中 σ 是 $\mathbb{Z}_p$ 的拓扑生成元的作用，在当前情形其对应 $(1+p)^t$。但是 $\mathbb{Q}\otimes\pi_tE_n$ 是 $\mathbb{Q}_p$-向量空间，$t\neq 0$ 时 $(1+t)^p-1$ 可逆，从而这就说明了其连续上同调平凡，从而完成了证明。 □

2.1 分裂系数

我们现在知道 Galois 下降产生的谱序列相当平凡，我们只需计算 $H^*_{cts}(\mathbb{G}_n,A)$，其中 $A=\pi_0E_n=W[\![u_1,\cdots,u_{n-1}]\!]$。这一上同调的计算依赖于系数环 A 能够被 Witt 环 W 被分裂这一事实，而这一事实来源这是所谓 Morava E 理论上的幂运算。

由于 Morava E-理论是 $\mathbb{E}_\infty$-环，乘性结构给出 $(E^{\otimes m})_{h\mathfrak{S}_m}\to E$，从而诱导了上同调运算

$$P^m:E^0\to E^0(B\mathfrak{S}_m)$$

$$[\mathbb{S}^0,E]\to[(\mathbb{S}^0)_{h\mathfrak{S}_m},(E^{\otimes m})_{h\mathfrak{S}_m}]\to[(\mathbb{S}^0)_{h\mathfrak{S}_m},E]$$

命题 2.2. *嵌入 $W\hookrightarrow A$ 有 $\mathbb{G}_n$-等变分裂，即 $\mathbb{G}_n$-直和 $A\cong W\oplus A^c$.*

证明. 记复合

$$\beta_m:E^0\xrightarrow{P_m}E^0(B\mathfrak{S}_m)\to E^0$$

记 $\beta(e)=\sum_{m\geq 0}\beta_m(e)x^m:E^0\to E^0[\![x]\!]$。注意追寻定义知 $\beta_0(a)=1,\beta_1(a)=a,\beta:E^0\to E^0[\![x]\!]$ 是加法群到乘法群的同态 $E^0\to 1+xE^0[\![x]\!]\subseteq E^0[\![x]\!]^\times$。

进一步商去极大理想过渡到 $\bar{\mathbb{F}}_p$，我们就有如下构造：

$$\begin{tikzcd}
E^0 \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr] & E^0[\![x]\!] \arrow[rr] & & \bar{\mathbb{F}}_p[\![x]\!] \arrow[r] & \bar{\mathbb{F}}_p \\
& 1+xE^0[\![x]\!] \arrow[u] \arrow[r] & 1+x\bar{\mathbb{F}}_p[\![x]\!]=W_{\mathrm{big}}(\bar{\mathbb{F}}_p) \arrow[ur] \arrow[rr] & & W \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

记构造中的箭头为 $\gamma:E^0\to W$，在复合上嵌入 $W\hookrightarrow E^0$，这给出了 W 的（加性）自同态 f，并且其 mod$p$ 后是恒等映射。于是 f 是自同构，从而 $\alpha=f^{-1}\circ\gamma$ 给出了所需的分裂。

更进一步，这个构造是 $\mathbb{G}_n$-等变的，因为幂运算 P_m 是 $\mathbb{G}_n$-等变的：$\mathbb{G}_n$ 在 E 上的作用是 $\mathbb{E}_\infty$-环运算。 □

我们的计算关键在如下定理:

定理 2.3 (Theorem B). *$H^s_{cts}(\mathbb{G}_n, W) \hookrightarrow H^s_{cts}(\mathbb{G}_n, A)$ 的余核被 p 的若干次幂零化,即 $H^s_{cts}(\mathbb{G}_n, A^c)$ 被 p 的若干次幂零化。*

2.2 Lazard 定理

前述定理将计算约化到了计算 $\mathbb{G}_n$ 的上同调。为此我们需要引入 p 进 Lie 群以及其上同调的计算，这主要是 Lazard 的工作。

定义 2.4 (局部域上的 Lie 群). 固定局部域 K，开子集 $U \subseteq K^n$，映射 $f : U \to K^m$ 称为解析的如果其局部上可以写为一个收敛幂级数，即 $\forall x \in U$:

$$f(x+y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha y^\alpha, \forall y \in \overline{B_{K^n}(0,r)}$$

使得 $\overline{B_{K^n}(x,r)} \subseteq U, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} ||a_\alpha|| r^{|\alpha|} < +\infty$.

称局部域 K 上的解析流形为 Hausdorff 拓扑空间 M，以及一组局部坐标卡使得转移函数是解析的。

局部域 K 上的 Lie 群指的是一个配备有 K 上解析流形结构的拓扑群，使得乘法和逆运算都是解析映射。

TODO.

现在计算 $\mathbb{G}_n$ 的上同调，为此我们考虑 $\mathbb{G}_n$ 作为 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ 被 $\mathcal{O}_D^\times$ 的扩张，自然使用 Lyndon-Hochschild-Serre 谱序列，为此我们需要先知道 $\mathcal{O}_D^\times$ 的上同调。

引理 2.5. *$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 或 $\mathcal{O}_D^\times$，其在 $\mathbb{Q}_p$ 上平凡作用，那么:*

$$H^*_{cts}(G, \mathbb{Q}_p) \cong \Lambda_{\mathbb{Q}_p}(x_1, x_3, \cdots, x_{2n-1})$$

证明. TODO. □

定理 2.6. *记号如前: $W = W(\bar{\mathbb{F}}_p), K = W[1/p]$。那么:*

1. *$H^i_{cts}(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p), W)$ 在高阶平凡，零阶为 $\mathbb{Z}_p$。*

2. *$\mathbb{G}_n$ 在 K 上的作用如果穿过商 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$，那么*

$$H^*_{cts}(\mathbb{G}_n, K) \cong \Lambda_{\mathbb{Q}_p}(x_1, x_3, \cdots, x_{2n-1})$$

证明. 由于 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ 的上同调维数是 1，我们只需计算 1 阶连续上同调。由于 W 是 p-完备的，我们只需计算其模 p 约化，即: $H^1_{cts}(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p), \bar{\mathbb{F}}_p) = 0$。但是（加性）Hilbert90 就立刻说明了这件事。

现在考虑计算 $\mathbb{G}_n$ 上同调的 Lyndon-Hochschild-Serre 谱序列

$$H^i_{cts}(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p), H^j_{cts}(\mathcal{O}_D^\times, K)) \implies H^{i+j}_{cts}(\mathbb{G}_n, K)$$

$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ 在 $H^j_{cts}(\mathcal{O}_D^\times) = H^j_{cts}(\mathcal{O}_D^\times, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ 的作用在第一个因子上是平凡的：这是因为 Galois 群在 $\mathcal{O}_D^\times$ 上的作用穿过 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$，而后者的生成元的作用对应着 $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_p^n}(\Gamma_n)$ 中 ξ 的共轭作用。从而由 Lazard 定理过渡到对应的 Lie 代数上，Galois 作用是一个内自同构，因此诱导了 Lie 代数上同调上的平凡作用。

本定理的前一部分说明 $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ 在 W 上的作用没有高阶上同调，因此综合起来就有：

$$H^*_{cts}(\mathbb{G}_n, K) \cong H^*_{cts}(\mathcal{O}_D^\times, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p \cong H^*_{cts}(\mathcal{O}_D^\times, \mathbb{Q}_p)$$

这就说明了结果。 □

2.3 定理 B 的证明策略

我们接下来简述定理 2.3的证明策略。首先基于简单而明确的 Lyndon-Hochschild-Serre 谱序列原因，我们将问题约化到计算 $\mathcal{O}_D^\times$ 的上同调。证明的关键在于 Lubin-Tate 塔（的逆向极限）和 Drinfeld 塔（的逆向极限）之间的联系。具体来说：

定理 2.7. *存在一个完美胚空间 $\mathcal{X}$：*

$$LT_K \xleftarrow{GL_n(\mathbb{Z}_p)} \mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{O}_D^\times} \mathcal{H}_K$$

其中左右箭头都是 pro-平展挠子，LT_K 为 Lubin-Tate 空间，即形式群律形变的模空间（即 Lubin-Tate 环对应的形式概形的刚性解析纤维）；$\mathcal{H}_K$ 为 Drinfeld 对称空间，即 $\mathbb{Q}_p$ 上的刚性解析空间 $\mathcal{H} = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{Q}_p) - \cup_H H$ 到 K 的基变换，其中 H 取遍所有超平面。

更进一步，$\mathcal{X}$ 上携带着 $GL_n(\mathbb{Z}_p) \times \mathcal{O}_D^\times$ 作用，使得 $GL_n(\mathbb{Z}_p)$-pro-平展挠子是 $\mathcal{O}_D^\times$ 等变的，反之亦然。

这个对偶现象可以通过局部 Shimura 簇与 Fargues-Fontaine 曲线上的向量丛的关系来解释，我们将在下一节中给出更精确的解释。现在我们解释这个对偶如何帮助我们完成证明。大致的直观是 $\mathcal{X}$ 上的 $GL_n(\mathbb{Z}_p) \times \mathcal{O}_D^\times$ 作用可以将 LT_K 的上同调的 $\mathcal{O}_D^\times$ 不动点转换成 $\mathcal{H}_K$ 的上同调的 $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ 不动点。得益于 Drinfeld 对称空间的精确描述，我们能够很好地控制右侧，从而计算左侧。

因此总结下来剩下的问题只有两个：1. 上述不动点之间的同构的精确叙述是什么？2. LT_K 的上同调的不动点距离其真正结构层的不动点还有一些距离，它们的关系是什么？在这一节我们要处理的是第一个问题，第二个问题则是整个问题的主要困难。

2.3.1 凝聚态群上同调

我们需要处理拓扑群的（可能携带拓扑系数）上同调，因此引入凝聚态群上同调是必要的。我们将会看到凝聚态系数和 pro-平展拓扑兼容良好，同时在固态系数的情形下对于拓扑群这一理论回到连续群上同调。

引理 2.8. *M 是拓扑 Abel 群，如果其上拓扑由一族有向集指标的子群 $(M_i)_{i\in I}, M_i \subset M_{i'} \iff i \geq i'$ 构成的邻域基诱导，使得 $M \to \varprojlim_{i\in I} M/M_i$ 是同构（即携带分离、完备线性拓扑的拓扑 Abel 群），那么 $\underline{M} \in \mathsf{CondAb}$ 是固态的。*

证明. 对于任何 $S \in \mathsf{ProFin}$，设 $S = \varprojlim S_i$。注意 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{CondAb}}(\mathbb{Z}[S], \underline{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cond}}(\underline{S}, \underline{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(S, M)$。

现在对于任何连续映射 $f : S \to M$，后复合 $S \to M/M_n$ 是局部常值的，因此穿过 $S_i \to M/M_n$，从而由泛性质升级为 $\mathbb{Z}[S_i] \to \underline{M/M_n}$，因此取极限升级为 $\mathbb{Z}[S]^{\blacksquare} \to \underline{M}$，这就说明其固态。 □

下面我们处理凝聚态框架的群上同调，一般情况下这自然是 $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}[\underline{G}]}(\mathbb{Z}, -)$。现在我们想处理固态系数的群上同调，这需要一点小小的改变：

固定一个（局部）pro-有限群 G，考虑 $\underline{G} \in \mathsf{CondGrp}$，考虑对应的群环 $\mathbb{Z}[\underline{G}]$，那么我们考虑预解析环 $(\mathbb{Z}[\underline{G}], \mathbb{Z}[\underline{G}][-]^{\blacksquare})$。

引理 2.9 ([Analytic, Proposition 12.8])**.** *给定解析（生像）环 $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$，凝聚态（生像）环态射 $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，那么 $\mathcal{N} = \mathcal{B}[-] \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 使得 $(\mathcal{B}, \mathcal{N})$ 也成为凝聚态生像环。*

这里 $- \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A}, \mathcal{M})$ 指导出完备化 $D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}, \mathcal{M})$。

命题 2.10. *预解析环 $\mathbb{Z}[G]_{\blacksquare} := (\mathbb{Z}[\underline{G}], \mathbb{Z}[\underline{G}][-]^{\blacksquare})$ 是解析环。*

证明. 由上一命题，唯一需要说明的是 $\mathbb{Z}[G][-]^{L\blacksquare} \cong \mathbb{Z}[G][-]^{\blacksquare}$。但注意上式左侧是

$$(\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[-])^{L\blacksquare} \cong (\mathbb{Z}[G])^{L\blacksquare} \otimes^{L\blacksquare}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[-]^{L\blacksquare}$$

但是回忆：

引理 2.11 ([Condensed, Example 6.5])**.** *对紧 Hausdorff 空间 X：*

$$\mathbb{Z}[X]^{L\blacksquare} = \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(R\Gamma(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

因此特别地，对于 pro-有限空间 $\mathbb{Z}[X]^{L\blacksquare}$ 聚集在 0 处。

因此上述导出固态化张量积的两个因子都是离散的，更进一步它们甚至都投射：注意对于 pro-有限空间 $S = \varprojlim S_i$：

$$\mathbb{Z}[S]^{\blacksquare} = \varprojlim \mathbb{Z}[S_i] = \varprojlim \underline{\mathrm{Hom}}(C(S_i, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = \underline{\mathrm{Hom}}(\varinjlim C(S_i, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = \underline{\mathrm{Hom}}(C(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}).$$

然而由 [Analytic, Theorem 5.4]，存在集合 I 使得 $C(S, \mathbb{Z}) = Z^{\oplus I}$，从而 $\mathbb{Z}[S]^{\blacksquare} = \mathbb{Z}^I$，再由 [Analytic, Theorem 5.8]，这是 Solid 的紧投射生成元。

综上上述导出固态化张量积也离散，这就证明了原命题。 □

解析环的好处是我们现在能方便地讨论固态 G-凝聚态 Abel 群，即解析环的完备模范畴 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}[G]_{\blacksquare}}$。特别地，我们自然可以将群上同调定义为 $D(\mathbb{Z}[G]_{\blacksquare}) \to D(\mathbb{Z}_{\blacksquare}) : H_{cond}(G, -) = \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[G]_{\blacksquare}}(\mathbb{Z}, -)$，也记为 $-^{hG}$。

注记. 由解析性，$D(\mathbb{Z}[G]_{\blacksquare}) \to D(\mathbb{Z}[G])$ 是全忠实的，因此我们这里定义的固态系数凝聚态群上同调和（无视固态系数）一般定义的凝聚态群上同调相符。另外 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}[G]_{\blacksquare}}$ 恰为底凝聚态 Abel 群为固态的 $\mathbb{Z}[G]$-模。

我们现在解释这个上同调如何回归到连续上同调：

引理 2.12. *假定 G 是 pro-有限群，我们不在记号上区分其和对应的凝聚态群：*

1. $\mathcal{C} \in D(\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}[G]_{\blacksquare}})$，$\mathcal{C}^{hG}$ *被如下余单纯对象计算*

$$\mathcal{C} \to \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[G], \mathcal{C}) \rightrightarrows \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[G^2], \mathcal{C}) \cdots$$

2. *如果 M 是携带分离、完备线性拓扑的拓扑 Abel 群，那么*

$$H^*_{cond}(G, \underline{M}) \cong \underline{H^i_{cts}(G, M)}$$

证明. 对于第一部分，我们已证固态化 $\mathbb{Z}[G]^{\blacksquare} = \varprojlim_H \mathbb{Z}[G/H]$ 是 $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}[G]_{\blacksquare}}$ 投射的，H 取遍 G 的开子群。因此

$$\cdots \mathbb{Z}[G^2]^{\blacksquare} \rightrightarrows \mathbb{Z}[G]^{\blacksquare} \to \underline{\mathbb{Z}}$$

给出了投射消解，从而计算了上同调。

对于第二部分，只需注意

$$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[G^n], \underline{M}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(G^n, \underline{M}) \cong \underline{C_{cts}}(G^n, M)$$

最后一项则是计算连续上同调的标准复形。 □

最后我们给出投影公式，在后续计算中我们需要使用它。

引理 2.13. *$M, N \in D(\mathbb{Z}[G]_{\blacksquare})$，使得 G 在 M 上的作用平凡，那么：*

$$M \otimes^{L\blacksquare} N^{hG} \cong (M \otimes^L_{\mathbb{Z}[G]_{\blacksquare}} N)^{hG}$$

证明. 注意 $D(\mathbb{Z}_{\blacksquare})$ 紧投射生成，于是取 $M = \varinjlim M_i$，那么：

$$LHS = \varinjlim M_i \otimes \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[G]_{\blacksquare}}(\mathbb{Z}, N)$$

但是 $M_i = \mathbb{Z}^{I_i}$ 可对偶，因此上式

$$= \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{Z}[G]_{\blacksquare}}(\mathbb{Z}, \varinjlim M_i \otimes N) = RHS$$

□

2.3.2 pro-平展拓扑的凝聚层上同调

我们来解释定理 2.7到底如何精确地给出某种上同调的不动点，注意出现的都是 pro-平展挠子，因此我们自然应该考虑 pro-平展上同调。然而为了处理拓扑群上同调，我们需要让系数凝聚态，我们下面详细解释这一点。

定义 2.14 (pro-平展拓扑)**.** 给定刚性解析空间 X，其 pro-平展景 $X_{\text{proét}}$ 定义如下：对象为 $U = \varprojlim_{i \in I} U_i, I$ 是余滤过指标集，U_i 是 X 上平展的刚性解析空间，使得对充分大 $i > j, U_i \to U_j$ 是有限平展并且满的。我们记 U 的底拓扑空间为 $|U| := \varprojlim |U_i|$，$|U_i|$ 指 U_i 的底拓扑空间。

$X_{\text{proét}}$ 上的拓扑由底拓扑空间上的覆盖给出。对于 $U \in X_{\text{proét}}$，我们定义不完备整结构层 $\mathcal{O}^+(U) = \varinjlim \mathcal{O}^+(U_i)$，并定义整结构层 $\hat{\mathcal{O}}^+ = \varprojlim \mathcal{O}^+/p^n$ 以及结构层 $\hat{\mathcal{O}} = \hat{\mathcal{O}}^+[1/p]$。

⚠. 这里的 pro-平展拓扑定义来自 [Sch12]，不要和 [Sch17] 定义的完美胚空间上的 pro-平展拓扑混淆。

更进一步，pro-平展拓扑有一组完美胚空间构成的基：

定义 2.15. 称 $U \in X_{\text{proét}}$ 是仿射胚完美胚 $U = \varprojlim U_i$，使得 $U_i = \mathrm{Spa}(R_i, R_i^+)$，使得 $R^+ := \widehat{\varinjlim R_i^+}, R = R^+[1/p]$ 是完美胚 K-代数。

更一般地 $U \in X_{\text{proét}}$ 称为完美胚的如果它被仿射胚完美胚覆盖。

完美胚空间具有如下性质：

命题 2.16 ([Sch12, Proposition 4.8, Lemma 4.10])**.**

1. *仿射胚完美胚空间 $U \in X_{\text{proét}}$ 是一组基*
2. *仿射胚完美胚空间 $U \in X_{\text{proét}}$ 满足 $i \geq 1, H^i(U_{\text{proét}}, \hat{\mathcal{O}}) = 0$，$H^i(U_{\text{proét}}, \hat{\mathcal{O}}^+)$ 几乎为 0.*

接下来我们将系数带上凝聚态。注意到 $\mathcal{O}^+, \hat{\mathcal{O}}^+, \hat{\mathcal{O}}$ 都已经自动是取值于拓扑环中的层，于是我们考虑其凝聚态版本，记为 $\hat{\mathcal{O}}^+_{\text{cond}}$。

另一方面，注意到 $*_{\text{proét}} = \mathsf{Cond}$，考虑推前 $\lambda : X_{\text{proét}} \to *_{\text{proét}}$，我们也可以对任何 $X_{\text{proét}}$ 上的 Abel 群取值层定义 $R\Gamma_{\text{cond}}(X_{\text{proét}}, \mathcal{F}) = R\lambda_* \mathcal{F} \in D(\mathsf{CondAb})$。

实际上，如上两种凝聚态化的方式对结构层是一样的，即：

引理 2.17.

$$R\Gamma_{\text{cond}}(X_{\text{proét}}, \hat{\mathcal{O}}^+) \cong R\Gamma(X_{\text{proét}}, \hat{\mathcal{O}}^+_{cond})$$

证明. 由于仿射胚完美胚构成 pro-平展拓扑的基，只需对仿射胚完美胚 $X = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ 验证。

此时一切归化到计算

$$\Gamma(X \times S, \hat{\mathcal{O}}^+) = \left(\varinjlim \Gamma(X \times S_i, \hat{\mathcal{O}}^+)\right)^{\wedge}_{(p)} = \left(\varinjlim C_{cts}(S_i, R^+)\right)^{\wedge}_{(p)}$$

$$= C_{cts}(S, R^+) = \Gamma(X_{\text{proét}}, \hat{\mathcal{O}}^+_{\text{cond}})(S)$$

其中倒数第二个等号的原因是 R^+ 为 p-完备的，我们详细解释这一点：

注意 $R^+ \subseteq R^\circ$，而 R° 是 p-完备的。另一方面 R°/R^+ 是 p-挠的：如果 $f \in R^\circ$，$(pf)^N \to 0$，从而由于 R^+ 开，一定存在 N 使得 $(pf)^N \in R^+$，这就说明了 p-挠性。 □

现在我们来处理 pro-平展挠子的上同调，这将给出定理 2.7的精确描述。

推论 2.18. *给定 pro-平展 G-挠子 $Y \to X$，使得 Y 完美胚，那么*

$$R\Gamma(X_{\text{proét}}, \hat{\mathcal{O}}^+) \cong R\Gamma(Y_{\text{proét}}, \hat{\mathcal{O}}^+)^{hG}$$

证明. 注意上一命题中我们实际上证明了对于任何 pro-有限空间，$\Gamma(X \times S, R^+) = C_{cts}(\mathbb{Z}[S], R^+)$。取导出函子就变为 $R\Gamma(X \times S, \hat{\mathcal{O}}^+_{\text{cond}}) \cong \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[S], R\Gamma(X, \hat{\mathcal{O}}^+_{\text{cond}}))$。

现在考虑 $Y \to X$，那么：

$$R\Gamma(X_{\text{proét}}, \hat{\mathcal{O}}^+) \cong \varprojlim(R\Gamma(Y, \hat{\mathcal{O}}^+_{\text{cond}}) \rightrightarrows R\Gamma(Y \times_X Y, \hat{\mathcal{O}}^+_{\text{cond}}))$$

而

$$R\Gamma(Y \times_X \cdots \times_X Y, \hat{\mathcal{O}}^+_{\text{cond}}) = R\Gamma(Y \times G^n, \hat{\mathcal{O}}^+_{\text{cond}}) = \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}[G^n], R\Gamma(Y \hat{\mathcal{O}}^+_{\text{cond}}))$$

而这就是计算凝聚态群上同调的消解。 □

推论 2.19 (定理 2.7的上同调推论)**.**

$$R\Gamma(LT_K, \hat{\mathcal{O}}^+_{\text{cond}})^{h\mathcal{O}_D^\times} \cong R\Gamma(\mathcal{H}_K, \hat{\mathcal{O}}^+_{\text{cond}})^{hGL_n(\mathbb{Z}_p)}$$

我们利用这个推论将 $\mathbb{G}_n$（$\mathcal{O}_D^\times$）的作用转化为 Drinfeld 空间上的作用。这回答了我们提出的第一个问题，剩余的只有第二个问题：这如何具体地和真正结构层的不动点关联？我们将给出一个联结凝聚态结构层和真正结构层的比较定理以解答这个问题。

3 局部 Shimura 簇

本节我们利用 [SW19] 给出定理 2.7的一个现代观点的证明。问题的关键在于 Lubin-Tate 空间和 Drinfeld 空间各自是某个模问题的模空间，分别被称为 Lubin-Tate 模问题和 Drinfeld 模问题。特别地这个模问题有着一系列子群做指标的级结构，对子群取逆向极限（即无穷级）后我们可以最终验证两个模问题实际上相同，从而这就是我们所需的 $\mathcal{X}$。

展开来说，Lubin-Tate 模问题和 Drinfeld 模问题都是所谓局部 Shimura 数据带来的模问题：局部 Shimura 数据顾名思义可以被理解为（正确意义的）Shimura 簇的局部版本。

[SW19] 引入了“shtuka”用来统一这些不同的模空间，并给予无穷级模问题一个 Fargues-Fontaine 曲线的解释，特别地这个观点能够直接解释前述 Lubin-Tate 塔和 Drinfeld 塔之间的对偶关系。

4 比较定理：单点的情况

5 比较定理：一般概形的情况

6 组装证明

References

[Analytic] Peter Scholze. *Lectures on Analytic Geometry* (cit. on p. 5).

[Condensed] Peter Scholze. *Lectures on Condensed Mathematics* (cit. on p. 5).

[HHT] H. (Ed.) Miller. *Handbook of homotopy theory*. Chapman and Hall/CRC., 2020. DOI: 10.1201/9781351251624 (cit. on p. 2).

[Sch12] Peter Scholze. *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*. 2012. arXiv: 1205.3463 [math.AG] (cit. on p. 7).

[Sch17] Peter Scholze. *Etale cohomology of diamonds*. 2022. arXiv: 1709.07343 [math.AG] (cit. on p. 7).

[SW19] Peter Scholze and Jared Weienstein. *Berkeley lectures on p-adic geometry*. 2019 (cit. on p. 8).