Algebraic K Theory

ZIXI LI

Qiuzhen College, Tsinghua University

2024

目录

第一部分 经典 K 理论 **1**

第一章 K_0, K_1, K_2 **2**

1.1 环的 K_0 . . . 2
1.2 对称幺半范畴、Abel 范畴和正合范畴的 K_0 . . . 3
1.2.1 对称幺半范畴 . . . 3
1.2.2 Abel 范畴 . . . 3
1.2.3 正合范畴 . . . 4
1.3 Waldhausen 范畴的 K_0 . . . 6
1.3.1 例：链复形范畴 . . . 9
1.4 环的 K_1 . . . 11
1.5 环的 K_1-K_0 基本定理 . . . 12
1.6 环的 K_2 . . . 16

第二章 高阶 K 理论的经典构造 **18**

2.1 环的高阶 K 理论 . . . 18
2.2 对称幺半范畴的高阶 K 理论：$B(S^{-1}S)$ . . . 19
2.2.1 BS 到 $BS^{-1}S$ 的过渡：群化 . . . 20
2.2.2 $+$ 构造与 $BS^{-1}S$ . . . 21
2.2.3 有趣的例子 . . . 22
2.3 正合范畴的高阶 K 理论：Quillen Q-构造 . . . 23
2.3.1 QQ 构造与乘积 . . . 24
2.3.2 $+ = Q$ . . . 24
2.4 Waldhausen 范畴的高阶 K 理论：Waldhausen $wS_\bullet$ 构造 . . . 26
2.5 Waldhausen 范畴 K 理论的基本性质 . . . 28
加性定理 . . . 28
局部化 . . . 28
逼近定理 . . . 29
消解定理 . . . 29
Dévissage . . . 29
Nisnevich 下降 . . . 29
2.5.1 $\mathbb{A}^1$-不变性：K 理论基本定理、非连合 K 理论 . . . 29

第二部分　现代 K 理论 **30**

第三章　∞-观点的代数 K 理论 **31**

3.1 $\mathbb{E}_1/\mathbb{E}_\infty$-幺半群和群 31
3.2 稳定 ∞-范畴 34
3.3 ∞-算畴 35
3.4 $\mathbb{E}_\infty$-环谱 39
3.5 群化定理 42
3.6 循环不变判别与 Quillen + 构造 42

第四章　稳定 ∞-范畴的 K 理论 **45**

4.1 Waldhausen S-构造 45
4.2 万有加性不变量与加性定理 46
4.2.1 稳定 ∞-范畴的工具：Verdier 序列 46
4.2.2 加性定理 49
4.3 纤维化定理和局部化定理 53

第一部分

经典 K 理论

第一章　K_0, K_1, K_2

1.1　环的 K_0

定义 1.1.1 (群化). 存在如下伴随对：

$$\text{Group Completion:}\mathbf{AbMon} \rightleftarrows \mathbf{Ab}\text{:Forgetful}$$

左伴随称为 Abel 幺半群的群化：它将幺半群 M 变为 $M^{-1}M := \mathbb{Z}^M/([m+n]-[m]-[n])$

定义 1.1.2 (环的 K_0). $K_0(R)$ 定义为有限投射 R-模的同构类在直和下构成的幺半群 $\mathbf{P}(R)$ 的群化，它是 $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Ab}$ 的函子。

进一步如果 R 交换，K_0 是 $\mathbf{CRing} \to \mathbf{CRing}$ 的函子，乘积由张量积 $\otimes_R$ 给出。

命题 1.1.3 (保持滤余极限). $R = \varinjlim R_i$，则 $K_0(R) \cong \varinjlim K_0(R_i)$。

证明. 注意有限生成投射 R 模 P 一定形如 $P_i \otimes_{R_i} R$，其余内容自明。 □

命题 1.1.4 (函子性，换基). 给定 $f: R \to S$，$P \mapsto P \otimes_R S$ 给出了

$$f^*: K_0(R) \to K_0(S)$$

如果 S 自身是有限生成投射右 R 模，那么 $Q \mapsto Q \otimes_S S$ 给出了

$$f_*: K_0(S) \to K_0(R)$$

注记 (Projection Formula). R 是交换环，A 是 R-代数使得其作为 R 模是有限生成投射的。那么

$$f_*(x \cdot f^*y) = f_*(x) \cdot y, \forall x \in K_0(A), y \in K_0(R)$$

命题 1.1.5 (Mayer-Vietoris 序列). 考虑 *Milnor* 方块（即 $f: R \to S$，R 的理想 I 满足 f 将 I 同构地射到某个 S 的理想，此时如下图表称为 *Milnor* 方块）

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ R/I \arrow[r, "\bar{f}"'] & S/I \end{tikzcd}$$

那么有正合列

$$GL(S/I) \xrightarrow{\partial} K_0(R) \xrightarrow{\Delta} K_0(S) \oplus K_0(R/I) \xrightarrow{\pm} K_0(S/I)$$

并且边缘映射 ∂ 的像是双陪集 $GL(S)\backslash GL(S/I)/GL(R/I)$。

证明. 只需指出边缘映射 ∂ 的构造：定义 $\partial_n : GL_n(S/I) \to K_0(R)$ 为 $g \mapsto [P] - [R^n]$，这里 P 构造取为如下映射的核：

$$S \times R/I \to S/I : (m_1, m_2) \mapsto \bar{m}_1 - g(\bar{f}(m_2))$$

（直观上说，这是将 $S, R/I$ 上的两个模沿着 S/I 上的"转移函数"粘结）这样构造出来的 P 仍然是有限生成投射的。 □

命题 1.1.6 (切除). *I 是 R 的理想，考虑增广环 $R \oplus I$，$K_0(I) = K_0(R, I) := \ker(K_0(R \oplus I) \to K_0(R))$。那么存在正合列*

$$GL(R) \to GL(R/I) \xrightarrow{\partial} K_0(I) \to K_0(R) \to K_0(R/I)$$

证明. 在 Mayer-Vietoris 序列命题 1.1.5中取 R 为这里的 I，S 为这里的 R 即可。 □

注记. 事实上，$K_0(R, I)$ 可以记为 $K_0(I)$ 因为它和 R 的选取无关，这依然可以通过观察 M-V 序列得到。

1.2 对称幺半范畴、Abel 范畴和正合范畴的 K_0

1.2.1 对称幺半范畴

定义 1.2.1 (对称幺半范畴的 K_0). 给定对称幺半范畴 S，假定其对象的同构类构成了一个集合 S^{iso}，那么 S 的幺半结构使得 S^{iso} 成为 Abel 幺半群。定义 $K_0(S)$ 为 S^{iso} 的群化。

命题 1.2.2 (共尾性). *T 是对称幺半范畴 S 的全子范畴，如果 T 包含单位 e 并且在有限乘积下封闭，那么 T 也是对称幺半的。称 T 在 S 中共尾，如果对每个 $s \in S, \exists s' \in S \text{s.t.} s \otimes s' \cong t, \exists t \in T$。此时：*

1. *$K_0(T)$ 是 $K_0(S)$ 的子群*
2. *每个 $K_0(S)$ 的元素都形如 $[s] - [t], s \in S, t \in T$*
3. *$K_0(S)$ 中 $[s] = [s']$ 说明对某个 $t \in T$，$s \otimes t \cong s' \otimes t$。*

1.2.2 Abel 范畴

定义 1.2.3 (Abel 范畴的 K_0). 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$，定义其 $K_0(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 中元素生成的自由 Abel 群商去正合列 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ 给出的关系 $[A] - [A'] - [A'']$。

如下自动满足：

1. $[0] = 0$（取 $A' = A$）
2. $A \cong A' \implies [A] = [A']$（取 $A'' = 0$）
3. $[A' \oplus A''] = [A'] + [A'']$（取 $A = A' \oplus A''$）

命题 1.2.4 (泛性质：万有加性不变量). $\mathcal{A}$ 上的加性函数（到 *Abel* 群的映射 $f:\mathcal{A}\to\Gamma$ 满足 $f(A)=f(A')+f(A'')$）穿过 $K_0(\mathcal{A})$。

命题 1.2.5 (函子性：正合函子诱导群同态). 自动地：正合函子 $f:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 给出 *Abel* 群同态 $K_0(\mathcal{A})\to K_0(\mathcal{B})$。

命题 1.2.6 (保持滤余极限). 对于小 *Abel* 范畴和正合函子组成的滤过系统 $\{\mathcal{A}_i\}$，有 **AbCat** 中的滤余极限 $\mathcal{A}=\varinjlim\mathcal{A}_i$，那么：

$$K_0(\mathcal{A})=\varinjlim K_0(\mathcal{A}_i)$$

定理 1.2.7 (Dévissage). $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$ 是小 *Abel* 范畴，如果 $\mathcal{B}$ 是正合子范畴、对子对象商对象封闭、任何 $\mathcal{A}$ 中的对象 A 都有一个有限滤过 $A=A_n\supset\cdots\supset A_0=0$ 使得 A_i/A_{i-1} 是 $\mathcal{B}$ 的对象，那么：嵌入（由于正合子范畴是正合函子）给出了同构：

$$K_0(\mathcal{B})\cong K_0(\mathcal{A})$$

证明. 只需注意 dévissage 给出的滤过使得我们可以将 $\mathcal{A}$ 中的对象 A 对应的 $[A]$ 变为 $\sum[A_i/A_{i-1}]$。良定义性源于两个有限滤过有共同的加细（Zassenhaus 蝴蝶引理），其余只需验证。 □

定理 1.2.8 (局部化：长正合列). $\mathcal{A}$ 是小 *Abel* 范畴，$\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 *Serre* 子范畴，有正合列：

$$K_0(\mathcal{B})\to K_0(\mathcal{A})\xrightarrow{K_0(loc)}K_0(\mathcal{A}/\mathcal{B})$$

注记. Serre 子范畴是指 Abel 子范畴并且在子对象、商对象和扩张下封闭。对于 Serre 子范畴 $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$，$\mathcal{A}$ 中态射称为是 $\mathcal{B}$-同构，如果其核和余核都是 $\mathcal{B}$ 中的对象。局部化 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ 是指对 $\mathcal{B}$-同构做局部化，其局部化范畴是 Abel 的，局部化函子是正合的。

证明. 只需证明 $K_0(\mathcal{B})\to K_0(\mathcal{A})$ 的余核 Γ 和 $K_0(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ 同构。注意有自然的满射 $\Gamma\to K_0(\mathcal{A}/\mathcal{B})$，只需给出其逆 $\gamma(loc(A))=[A]$：这是良定义的。

如果 $loc(A_1)\cong loc(A_2)$，那么存在 $A_1\xleftarrow{f}A\xrightarrow{g}A_2$ 使得 f 是 $\mathcal{B}$-同构。由于 $loc(A_1)\cong loc(A_2)$，那么 g 也是 $\mathcal{B}$-同构。因此在 $K_0(\mathcal{A})$ 中：

$$[A]=[A_1]+[\ker(f)]-[\operatorname{coker}(f)]=[A_2]+[\ker(g)]-[\operatorname{coker}(g)]$$

那么这就说明了结果。

现在只需验证 γ 是群同态：这是直截了当的。 □

1.2.3 正合范畴

定义 1.2.9 (正合范畴). 一个正合范畴是指偶对 $(\mathcal{C},\mathcal{E})$，其中 C 是加性范畴，$\mathcal{E}$ 是一族形如 $\{0\to B\to C\to D\to 0\}$ 的态射，满足：存在到 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的嵌入使得 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的满子范畴，$\mathcal{E}$ 是全体 $\mathcal{C}$ 中的（在 $\mathcal{A}$ 的 Abel 结构下的）正合列，$\mathcal{C}$ 在扩张下封闭。

称一个态射是容许单射，如果它作为某个 $\mathscr{E}$ 中的 $B\to C$ 出现。

称正合范畴之间的函子是正合函子。如果它是加性函子并且将短正合列映为短正合列。

定义 1.2.10 (正合范畴的 K_0). $K_0(\mathcal{C})$ 定义与 Abel 情况相同。

注记. 正合范畴的反范畴 $\mathcal{C}^{op}$ 自动有着正合范畴结构：将原有短正合列翻转即可，于是 $K^0(\mathcal{C}) \cong K^0(\mathcal{C}^{op})$。

命题 1.2.11 (函子性：正合函子诱导群同态). 同 *Abel* 范畴。

命题 1.2.12 (保持滤余极限). $\{\mathcal{C}_i\}$ 是正合范畴和正合函子组成的滤过系统，那么

$$K_0(\varinjlim \mathcal{C}_i) = \varinjlim K_0(\mathcal{C}_i)$$

命题 1.2.13 (共尾性). $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{C}$ 的正合子范畴，并且在扩张下封闭。对于任何 $\mathcal{C}$ 中的对象 C，存在 $\mathcal{C}$ 中对象 C' 使得 $C \coprod C'$ 是 B 中的对象，那么 $K_0(\mathcal{B})$ 是 $K_0(\mathcal{C})$ 的子群。

命题 1.2.14 (积). 正合范畴之间的双正合函子 $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 给出了双线性映射

$$K_0(\mathcal{A}) \otimes K_0(\mathcal{B}) \to K_0(\mathcal{C})$$

定义 1.2.15. $\mathcal{P}$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的加性子范畴，C 是 $\mathcal{A}$ 的一个对象，它的 $\mathcal{P}$-消解是指：

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to C \to 0$$

使得 $P_i \in \mathcal{P}$。C 的 $\mathcal{P}$-维数是指其消解的最小长度。

定理 1.2.16 (消解定理). $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$，$\mathcal{A}$ 是 *Abel* 范畴，$\mathcal{C}$ 是正合范畴。如果：

1. 每个 C 中的对象都有有限 $\mathcal{P}$-维数
2. $\mathcal{C}$ 对 $\mathcal{A}$ 中满射的核封闭

那么 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$ 给出了同构 $K_0(\mathcal{P}) \cong K_0(\mathcal{C})$。

证明. $K_0(\mathcal{P}) \to K_0(\mathcal{C})$ 的满射是容易的：因为对于任何 $C \in \mathcal{C}$，考虑其有限长消解

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to C$$

那么 $[C] = \sum(-1)^i[P_i]$，从而这就说明了满射。下面只需证明良定义性和加性，一般情况参见 [Wei13, II.7.6]。对于 $\mathcal{P}$ 是投射对象的特例，这个结果是很好说明的：因为这不过是可提升性和马蹄引理。 □

例子 (重要例子：$\mathbf{H}(R)$). 取 $\mathbf{H}(R)$ 为全体拥有有限生成投射模给出的有限长消解的 R-模 M 构成的全子范畴；$\mathbf{H}_n(R)$ 为全体拥有长度 $\leq n$ 的上述消解的 R-模构成的全子范畴。马蹄引理说明了它们都是 $R\mathbf{mod}$ 的正合子范畴。那么对 $\mathbf{P}(R) \subseteq \mathbf{H}(R)$ 运用消解引理就说明了：

$$K_0(R) \cong K_0\mathbf{H}(R) \cong K_0\mathbf{H}_n(R), \forall n \geq 1$$

特别地，我们考虑局部化的情况：S 是非零因子构成的乘性子集，称 M 模是 S-挠的，如果 $\exists s \in S, Ms = 0$。取 $\mathbf{H}_S(R)$ 为全体 $\mathbf{H}(R)$ 中的有限生成 S-挠模，同样定义 $\mathbf{H}_{n,S}(R)$。那么

$$K_0\mathbf{H}_S(R) \cong H_0\mathbf{H}_{n,S}(R) \cong K_0\mathbf{H}_{1,S}(R), \forall n \geq 1$$

这是因为任何 $\mathbf{H}_{n,S}(R)$ 中的模 N，如果 $Ns = 0$，就有正合列

$$0 \to L \to (R/sR)^m \to N \to 0$$

现在取 N 的长度为 n 的消解，$(R/sR)^m$ 自然有长度为 1 的消解。我们来看这两个消解 $P_\bullet \to (R/sR)^m, Q_\bullet \to N$，那么投射性保证了有消解之间的链映射。现在取 $P_0' = \ker P_0 \oplus Q_1 \to Q_0$，那么映映射锥 $\cdots P_1 \oplus Q_2 \to P_0'$ 给出了 L 的长度 $n-1$ 的消解。那么归纳就说明了结果。

特别地，在这一情况下：

$$K_0\mathbf{H}_S(R) \to K_0(R) \to K_0(S^{-1}R)$$

是正合的：如果 $[P] \in K_0(R)$ 在 $K_0(S^{-1}R)$ 中消失，那么 $S^{-1}P$ 是稳定自由的，即：$(S^{-1}R)^{m+n} \cong S^{-1}P \oplus (S^{-1}R)^m$。通过通分，这给出了 $f : R^{m+n} \to P \oplus R^m$，其核、余核是 S-挠模。但是 S 是非零因子，于是 $\ker f = 0$，从而 $M = \operatorname{coker} f \in \mathbf{H}_{1,S}(R)$，这就是 $[P]$ 的原像。

以上，我们简要给出了加性框架下的 K_0 的大致结果，注意我们省略了很多有助于计算环的 K_0 的相关内容。

1.3 Waldhausen 范畴的 K_0

我们下面给出一个使用范围更广的 K 理论构造，它建立在比正合范畴要求更弱的范畴之上。

定义 1.3.1 (余纤维化范畴). 一个余纤维化范畴是一个范畴 $\mathcal{C}$ 以及一族在复合下封闭的态射族 $Cof_{\mathcal{C}}$（其中态射称为余纤维化），满足：

1. 所有同构都是余纤维化

2. 存在零对象 0，使得唯一的映射 $0 \to A$ 是余纤维化，$\forall A \in \mathcal{C}$

3. 纤维化沿任何态射的推出都存在，并且也推出为纤维化

作为推论，余纤维化范畴存在有限余积；每个余纤维化 $A \hookrightarrow B$ 都有余核 B/A，称 $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/A$ 为余纤维化序列。

定义 1.3.2 (Waldhausen 范畴). 一个 Waldhausen 范畴 $\mathcal{C}$ 是指一个余纤维化范畴 $\mathcal{C}$，以及一族在复合下封闭的态射族 $W_{\mathcal{C}}$（其中态射称为弱等价），满足：

1. 所有同构都是弱等价

2. 弱等价粘结性质成立：即对如下形式的图表

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "\sim"] & A \arrow[l] \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sim"] & B \arrow[d, "\sim"] \\ C' & A' \arrow[l] \arrow[r, hook] & B' \end{tikzcd}$$

其诱导的推出之间的态射 $B \cup_A C \to B' \cup_{A'} C'$ 也是弱等价。

更进一步，如果弱等价满足 2-out-of-3 性质（即 f, g, fg 中有两者是弱等价推出第三者也是），那么称 Waldhausen 范畴是饱和的。

定义 1.3.3 (Waldhausen 范畴的 K_0). 对于 Waldhausen 范畴 $\mathcal{C}$，取 $K_0(\mathcal{C})$ 为其元素 C 生成的自由 Abel 群商去如下关系：

1. $[C] = [C']$，如果存在弱等价 $C \xrightarrow{\sim} C'$
2. $[C] = [B] + [C/B]$，如果存在余纤维序列 $B \hookrightarrow C \to C/B$

如同 Abel 范畴中的情况一样，再一次有

1. $[0] = 0$
2. $[B \coprod C] = [B] + [C]$
3. 对于余纤维化的推出有：$[B \cup_A C] = [B] + [C] - [A]$

命题 1.3.4 (正合范畴 K_0=Waldhausen 范畴 K_0). *每个正合范畴都是 Waldhausen 范畴，其中余纤维化是容许单射，弱等价是同构。那么此时 K_0 的两个定义相同。*

定义 1.3.5 (双 Waldhausen 范畴). 称 $\mathcal{C}$ 是双纤维化范畴，如果 $\mathcal{C}$ 是余纤维化范畴，并且 $\mathcal{C}$ 中的全体 $B \to B/A$ 在 $\mathcal{C}^{op}$ 中（i.e. $B/A \to B$）构成的态射族使得 $\mathcal{C}^{op}$ 也是余纤维化。记这个族为 $Quot_{\mathcal{C}}$。

称 $\mathcal{C}$ 是双 Waldhausen 范畴，如果 $(\mathcal{C}, Cof_{\mathcal{C}}, W_{\mathcal{C}})$ 和 $(\mathcal{C}^{op}, Quot_{\mathcal{C}}, W_{\mathcal{C}}^{op})$ 都是 Waldhausen 范畴。

注记. 正合范畴是双 Waldhausen 范畴。

定义 1.3.6 (正合函子, Waldhausen 子范畴). Waldhausen 范畴之间的函子 F 称为正合函子，如果它保持零对象、余纤维化、弱等价和沿着余纤维化的推出。此时正合函子 F 给出了同态 $K_0(F) : K_0(\mathcal{C}) \to K_0(\mathcal{D})$。

Waldhausen 子范畴是一个 Waldhausen 范畴 $\mathcal{C}$ 的携带 Waldhausen 结构的子范畴 $\mathcal{A}$，使得

1. $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 是正合函子
2. $\mathcal{A}$ 中的余纤维化恰好是 $\mathcal{C}$ 中全体使得余核在 $\mathcal{A}$ 中的余纤维化
3. $\mathcal{A}$ 中的余纤维化恰好是 $\mathcal{C}$ 中全体在 $\mathcal{A}$ 中的余纤维化

注记. 正合范畴之间的函子（视作 Waldhausen 范畴时）是正合的当且仅当它是加性的、并且保持短正合列。这和前文的定义相符。

命题 1.3.7 (积). *Waldhausen 范畴之间的 $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 如果对每个分量都是正合的，那么它给出了双线性映射*

$$K_0(\mathcal{A}) \otimes K_0(\mathcal{B}) \to K_0(\mathcal{C})$$

定理 1.3.8 (局部化：长正合列). 假定余纤维化范畴 $\mathcal{C}$ 有两族弱等价 $v \subseteq w$ 都使得它们构成 *Waldhausen* 范畴，分别记为 $v\mathcal{C}$ 和 $w\mathcal{C}$。

假定 $w\mathcal{C}$ 是饱和的，$\mathcal{C}^w$ 是全体 *w-acyclic* 对象（即 $0 \hookrightarrow c$ 是 w 中的弱等价）张成的满子范畴，那么 $\mathcal{C}^w$ 是 $v\mathcal{C}$ 的 *Waldhausen* 子范畴。

如果任何 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : C_1 \to C_2$ 可以分解为余纤维化 $C_1 \hookrightarrow C$ 和 v 中的弱等价 $C \to C_2$，那么：

$$\mathcal{C}^w \to v\mathcal{C} \to w\mathcal{C}$$

给出了如下正合列

$$K_0(\mathcal{C}^w) \to K_0(v\mathcal{C}) \to K_0(w\mathcal{C}) \to 0$$

证明. 和 Abel 范畴的情况同理。 □

例子. 取 *Waldhausen* 范畴 $(\mathcal{C}, Cof, v)$，G 是一个 *Abel* 群，以及给定一个满同态 $\pi : K_0(\mathcal{C}) \to G$。取 $\mathcal{C}^\pi$ 为全体使得 $\pi([C]) = 0$ 的 $\mathcal{C}$ 中对象张成的 *Waldhausen* 子范畴。

现在如果 $\mathcal{C}$ 中的任何态射都可以分解为余纤维化和 v 中弱等价，我们取另一个弱等价结构 w 为全体使得 $\pi([A]) = \pi([B])$ 的态射 $A \to B$，它满足局部化长正合列定理的条件，因此就有

$$K_0(\mathcal{C}^\pi) \to K_0(\mathcal{C}) \to G \to 0$$

但是更进一步，$\mathcal{C}^\pi$ 是共尾的，因为对于任何 $C \to 0$ 可以分解为 $C \hookrightarrow C'' \xrightarrow{\sim} 0$，于是取 C''/C，就有：

$$\pi([C \coprod (C''/C)]) = \pi([C]) + \pi([C''/C]) = \pi([C'']) = 0$$

那么由共尾性，这就说明了我们的正合列实际上可以延长为：

$$0 \to K_0(\mathcal{C}^\pi) \to K_0(\mathcal{C}) \to G \to 0$$

定理 1.3.9 (逼近定理). 如果 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 *Waldhausen* 范畴之间的正合函子，假设 F 还满足：

1. 态射 f 是弱等价 $\iff$ 其像 $F(f)$ 是弱等价
2. $\mathcal{B}$ 中态射 $b : F(A) \to B$ 可以分解为 $\mathcal{A}$ 中余纤维化 $a : A \hookrightarrow A'$ 在 F 下的像和弱等价 $F(A') \xrightarrow{\sim} B$。
3. 在上述分解中如果 b 是弱等价，那么 a 也可以被选择为一个弱等价。

此时 F 给出了同构

$$K_0(\mathcal{A}) \cong K_0(\mathcal{B})$$

证明. 首先我们对 $0 \hookrightarrow B$ 应用条件 2. 对任何 B 都存在一个弱等价 $F(A) \xrightarrow{\sim} B$。现在如果 $F(A) \to B$ 是弱等价，取出对应的 A'，那么 $A \to A'$ 也是弱等价，于是这两件事就共同说明了：$K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{B})$ 是满的，并且 $\mathcal{A}$ 中对象的弱等价类和 $\mathcal{B}$ 中对象的弱等价类同构。

现在对于余纤维序列 $B \hookrightarrow C \to C/B$，由第一句话存在 $F(A) \xrightarrow{\sim} B$。再对 $F(A) \to C$ 做分解，取出对应的 $A \hookrightarrow A'$，以及 $F(A') \xrightarrow{\sim} C$，我们就有

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, equal] & F(A) \arrow[l] \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "\sim"] & F(A') \arrow[d, dashed, "\sim"] \\
0 & B \arrow[l] \arrow[r, hook] & C
\end{tikzcd}$$

于是由弱等价的粘合，这就给出了 $F(A'/A) \to C/B$ 是弱等价。从而：$[C]=[B]+[C/B] \iff [A']=[A]+[A'/A]$，这就说明了一切。 □

1.3.1 例：链复形范畴

以上是 Waldhausen 范畴的 K_0 的大致结果。下面以链复形范畴为例计算其 Waldhausen 范畴 K_0。

命题 1.3.10. *考虑 Abel 范畴 $\mathcal{A}$（更一般地，正合范畴），其链复形范畴 $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ 和有界链复形范畴 $\mathbf{Ch}^b(\mathcal{A})$ 在如下结构下成为饱和双 Waldhausen 范畴：*

余纤维化：逐项单射的链映射；弱等价：拟同构。

命题 1.3.11.

$$K_0(\mathbf{Ch}(\mathcal{A}))=0$$

证明. 注意对于链映射 $f: B \to C$，有链复形的短正合列 $0 \to C \to cone(f) \to B[-1] \to 0$，因此 $[C]+[B(-1)]=[cone(f)]$。特别地：取 $f=\mathrm{id}$ 就有：

$$[C]+[C(-1)]=[cone(\mathrm{id})]=0$$

因此 $[C[n]]=(-1)^n[C]$。现在对于任何一个上有界链复形 C，考虑

$$B=C\oplus C[2]\oplus C[4]\oplus\cdots$$

那么有正合列

$$0\to B[2]\to B\to C\to 0$$

于是 $[C]=[B]-[B[2]]=[B]-[B]=0$。

对于下有界链复形同理，但是任何一个链复形 C 都可以分离成如下短正合列

$$0\to B\to C\to D\to 0$$

其中 $B_n=0, n>0; B_n=C_n, n\le 0$，$D$ 同理。B, D 分别上下有界，于是 $[C]=[B]+[D]=0$，这就说明了结果。 □

定理 1.3.12.

$$K_0(\mathcal{A})\cong K_0\mathbf{Ch}^b(\mathcal{A})$$

其中 $K_0(\mathcal{A})\to K_0(\mathbf{Ch}^b(\mathcal{A}))$ 由 $\mathcal{A}\to\mathbf{Ch}^b(\mathcal{A}): A\mapsto(\cdots\to 0\to A\to 0\to\cdots)$ 诱导；

$K_0(\mathbf{Ch}^b(\mathcal{A}))\to K_0(\mathcal{A})$ 由 $[C]\mapsto\sum(-1)^i[C_i]$ 给出。

证明. 两侧的同构映射都已经给出，直接验证就可以说明结果。 □

我们还有更多链复形范畴：

命题 1.3.13. *同调有界链复形范畴 $\mathbf{Ch}^{hb}(\mathcal{A})$，上有界同调有界链复形范畴 $\mathbf{Ch}^{hb}_{-}(\mathcal{A})$ 都是 Waldhausen 子范畴。事实上，它们都是饱和双 Waldhausen 范畴。*

定理 1.3.14. 对于 $\mathbf{Ch}^b(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{Ch}_-^{hb}(\mathcal{A})$，有：

$$K_0(\mathbf{Ch}^b(\mathcal{A})) \cong K_0(\mathbf{Ch}_-^{hb}(\mathcal{A}))$$

证明. 我们运用定理 1.3.9。注意拟同构当然在嵌入下保持，于是第一条成立。现在对于任何有界复形 B 以及上有界同调有界链复形 C，以及链映射 $f : B \to C$。考虑温和截断

$$\tau_{\geq n}C = (\cdots \to C_{n+1} \to \ker(C_{n+1} \to C_n) \to 0 \to \cdots)$$

这是一个有界链复形，并且在 $i \geq n$ 处的同调与 C 同构。因此对充分小 n 有拟同构 $\tau_{\geq n}C \xrightarrow{\sim} C$。现在 $f : B \to C$ 当然穿过 $\tau_{\geq n}$（对充分小 n），取映射柱 A，就有：

余纤维化 $B \hookrightarrow A$，以及弱等价 $A \xrightarrow{\sim} \tau_{\geq n}C \xrightarrow{\sim} C$。这就验证了条件成立，于是逼近定理说明了一切。 □

同理，我们还有：

定理 1.3.15. $\mathbf{Ch}_+^{hb}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbf{Ch}^{hb}(\mathcal{A})$ 满足逼近定理定理 *1.3.9*，从而诱导了 K_0 的同构。

推论 1.3.16.

$$K_0\mathbf{Ch}^{hb}(\mathcal{A}) \cong K_0\mathbf{Ch}_-^{hb}(\mathcal{A}) \cong K_0\mathbf{Ch}_+^{hb}(\mathcal{A}) \cong K_0\mathbf{Ch}^b(\mathcal{A}) \cong K_0(\mathcal{A})$$

证明. 只需处理 $\mathbf{Ch}^{hb}$ 的情况：这是因为

$$K_0\mathbf{Ch}^{hb}(\mathcal{A}) \cong K_0\mathbf{Ch}^{hb}(\mathcal{A}^{op}) \cong K_0\mathbf{Ch}_+^{hb}(\mathcal{A}^{op}) \cong K_0\mathbf{Ch}_-^{hb}(\mathcal{A})$$

这就说明了结果。 □

例子 (完美复形范畴和环的 K_0). 取交换环 R，称 R-模链复形 $M_\bullet$ 是完美的，如果存在有限生成投射 R-模组成的有界链复形 $P_\bullet$ 到 $M_\bullet$ 的拟同构。全体完美链复形组成了一个 *Waldhausen* 子范畴 $\mathbf{Ch}_{perf}(R)$。

我们宣称逼近定理对 $\mathbf{Ch}^b(\mathbf{P}(R)) \subseteq \mathbf{Ch}_{perf}^b(R)$ 成立：因为我们只需要从某个起点开始反复使用投射模的提升性质。

同时我们可以仿照上一命题的证明方法说明 $K_0\mathbf{Ch}_{perf}^b(R) \cong K_0\mathbf{Ch}_{perf}(R)$（通过考虑上有界子范畴 *etc.*），于是这就说明了：

$$K_0\mathbf{Ch}_{perf}(R) \cong K_0\mathbf{Ch}^b\mathbf{P}(R) \cong K_0(R)$$

例子 (带支撑的链复形). 取 S 是 R 的乘性子集，$\mathbf{Ch}_S^b\mathbf{P}(R)$ 是所有满足在局部化 $S^{-1}E$ 下正合的链复形 E 构成的 *Waldhausen* 子范畴。它的 K_0 记为 $K_0(R \text{ } on \text{ } S)$。注意显而易见地我们有另外一组弱等价（即在 S^{-1} 下后是拟同构），那么局部化长正合列立刻说明了：

$$K_0(R \text{ } on \text{ } S) \to K_0(R) \to K_0(w\mathcal{C}) \to 0$$

然而 $w\mathcal{C} \to \mathbf{Ch}^b\mathbf{P}(S^{-1}R)$ 给出了 K_0 上的单射。这是因为全体形如 $S^{-1}P$ 的模构成的范畴 $\mathcal{B}$ 在 $\mathbf{S^{-1}R}$ 中是共尾的（它包含所有 $(S^{-1}R)^n$），于是这直接说明了单射。

因此我们有正合列

$$K_0(R \text{ } on \text{ } S) \to K_0(R) \to K_0(S^{-1}R)$$

注记. 逼近定理对 $w\mathcal{C} \to \mathbf{Ch}^b(\mathcal{B})$ 成立。

1.4 环的 K_1

定义 1.4.1 (环的 K_1). 环 R 的 K_1 定义为

$$K_1(R) := GL(R)/[GL(R), GL(R)]$$

其中 $GL(R) = \varinjlim GL_n(R)$，嵌入通过嵌入到左上角，在 $(n+1, n+1)$ 处添加 1 实现。

这个构造有显然的函子性。

我们给出这个交换子 $[GL(R), GL(R)]$ 更精确的描述。

考虑初等矩阵 $e_{ij}(r)$（除了 (i,j) 处为 r、对角线处为 1，其它元素均为 0），取全体这样的初等矩阵在 $GL_n(R)$ 里生成的子群，记为 $E_n(R)$。

引理 1.4.2. $n \geq 3$ 时 $E_n(R)$ 是完美群（交换化后为平凡群），作为推论得到 $E_n(R) \subseteq [GL_n(R), GL_n(R)]$。

证明. i, j, k 互不相同，则 $e_{ij}(r) = [e_{ik}(r), e_{kj}(1)]$ □

定理 1.4.3 (Whithead 引理). $E(R) = \varinjlim E_n(R)$ 是 $GL(R)$ 的交换子群，于是 $K_1(R) = GL(R)/E(R)$。

证明. 只需证明每个交换子都是 $E(R)$ 中的元素：这是因为 $GL_n(R)$ 中的交换子在 $GL(R)$ 中可以和如下 $GL_{2n}(R)$ 中的元素等同：

$$[g,h] \sim \begin{pmatrix} g & \\ & g^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & \\ & h^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{-1}h^{-1} & \\ & hg \end{pmatrix}$$

但是在 $GL_{2n}(R)$ 中我们有：

$$\begin{pmatrix} g & \\ & g^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & g \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ -g^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

同时注意到 $w_{ij} := e_{ij}(1)e_{ji}(-1)e_{ij}(1)$，因此观察 $w_{jk}w_{ij}$ 给出了所有在标准基下 $\{\pm\vec{e}_1, \pm\vec{e}_2, \cdots, \pm\vec{e}_n\}$ 作用为三循环的矩阵，于是能够表出所有作用为偶置换的矩阵。

这就说明了 $\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \in E_{2n}(R)$，于是这就说明了 $[g,h] \in E_{2n}(R)$。 □

命题 1.4.4 (K_1 的同调描述).

$$K_1(R) = H_1(GL(R); \mathbb{Z}) = \varinjlim H_1(GL_n(R); \mathbb{Z})$$

更进一步：取 $t\mathbf{P}$ 如下，对象为有限生成投射摸的同构类，态射 $P \to P'$ 为使得 $P \oplus Q \cong P'$ 的 Q 的同构类。那么它有共尾子范畴 R^n，从而：

$$K_1(R) = \varinjlim_{P \in t\mathbf{P}} H_1(Aut(P); \mathbb{Z})$$

定义 1.4.5 (相对 K_1 群). 对于 R 的理想 I，取 $GL(I)$ 为 $GL(R) \to GL(R/I)$ 的核。定义 $E(R,I)$ 为 $E(R)$ 中包含 $e_{ij}(x), x \in I$ 的最小的正规子群。类似 Whitehead 引理的论证说明 $E(R,I)$ 是 $GL(I)$ 的正规子群，并且包含 $GL(I)$ 的交换子。

因此定义 $K_1(R,I) := GL(I)/E(R,I)$，这是一个 Abel 群。此构造有显然的函子性。

命题 1.4.6 (K 群长正合列). *存在正合列*

$$K_1(R,I) \to K_1(R) \to K_1(R/I) \xrightarrow{\partial} K_0(I) \to K_0(R) \to K_0(R/I)$$

证明. 考虑命题 1.1.6：

$$0 \to GL(I) \to GL(R) \to GL(R/I) \to K_0(I) \to K_0(R) \to K_0(R/I)$$

那么直接观察 E 的表现：$E(R)$ 满地映到 $E(R/I)$，只需证明 $K_1(R)$ 处的正合性。

假定 $g \in GL(R)$ 在 $K_1(R/I)$ 下的像是 0，即 $\bar{g} \in GL(R/I)$ 是 $E(R/I)$ 的元素。现在取原像 $e \in E(R)$，那么 $ge^{-1} \in GL(I)$，从而给出了在 $K_1(R,I)$ 中的原像。 □

我们现在将 K_0 的 Mayer-Vietoris 序列（命题 1.1.5）延长：

命题 1.4.7 (Mayer-Vietoris 序列). *考虑 Milnor 方块（即 $f: R \to S$，R 的理想 I 满足 f 将 I 同构地射到某个 S 的理想，此时如下图表称为 Milnor 方块）*

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\
R/I \arrow[r, "\bar{f}"'] & S/I
\end{tikzcd}$$

那么有正合列

$$K_1(R) \xrightarrow{\Delta} K_1(S) \oplus K_1(R/I) \xrightarrow{\pm} K_1(S/I) \xrightarrow{\partial} K_0(R) \xrightarrow{\Delta} K_0(S) \oplus K_0(R/I) \xrightarrow{\pm} K_0(S/I)$$

证明. 考虑命题 1.1.5，其最左端由于 $K_0(R)$ 是 Abel 的可以替换成为 $K_1(S/I)$（Abel 化泛性质），这就给出了这里的长正合列，并且在 K_0 处的正合性都已经证过。

现在回忆命题 1.1.5对 ∂ 的像的描述，这直接给出了 $K_1(S/I)$ 的正合性。最后最左侧的正合性证明如下：

如果 $g \in GL_n(R/I), h \in GL_n(S)$，存在初等矩阵 $\bar{e} \in E(S/I)$ 使得 $\bar{f}(\bar{g})\bar{e} \equiv h, \mod I$，取 $e \in E_n(S)$ 为原像，$\bar{f}(\bar{g}) \equiv he^{-1} \mod I$，那么由于 R 是 $S, R/I$ 的拉回，存在 $g \in GL_n(R)$ 和 $\bar{g} \mod I$ 同余，并且 $f(g) = he^{-1}$，这就说明了一切。 □

1.5 环的 K_1-K_0 基本定理

定理 1.5.1 (环局部化 K_1-K_0 正合列). *S 是 R 的乘性子集（为简便起见假定其不含零因子：事实上结论对一般的乘性子集也正确）。那么有*

$$K_1(R) \to K_1(S^{-1}R) \to K_0(R \text{ on } S) \to K_0(R) \to K_0(S)$$

证明. 首先指明边缘同态：它将每个 $\alpha \in GL(S^{-1}R)$ 射至这个映射（诱导的自然链映射：Complexes concentrated at 0）的映射锥。良定义性验证略：[Wei13, III.3.1]

后三项正合是第 1.3.1 节，在中间处正合见 [Wei13, III.3.1.5]。第二项处正合是因为我们通过将 $K_0(R \text{ on } S)$ 和 $K_0\mathbf{H}_S(R)$ 等同后可以手动验证得到：[Wei13, III.3.2]。 □

定义 1.5.2 (NK 群). 定义

$$NK_0(R) = \ker(K_0(R) \to K_0(R[t])) = K_0(R[t], (t-r))$$

$$NK_1(R) = \ker(K_0(R) \to K_0(R[t])) = K_1(R[t], (t-r))$$

定义 1.5.3. 定义 $\mathbf{Nil}(R)$ 为全体 (P,ν) 在 $\mathbf{End}(R)$ 中张成的子范畴，其中 P 是有限生成投射 R-模，ν 是 P 的幂零自同态。这是一个正合子范畴。容易验证：$[(P,\nu)] \to [P]$ 给出了一个直和分解

$$K_0\mathbf{Nil}(R) \cong K_0(R) \oplus Nil_0(R)$$

其中 $Nil_0(R)$ 是上述遗忘映射的核，它被如下形式的元素生成 $[(R^n,\nu)] - n[(R,0)]$。

命题 1.5.4.

$$K_0(R[t] \ on \ \{t^n\}) \cong K_0\mathbf{Nil}(R) \cong K_0(R) \oplus Nil_0(R)$$

证明. 我们先证如下结果：$\mathbf{Nil}(R)$ 和 $\mathbf{H}_{1,\{t^n\}}(R[t])$ 之间存在范畴等价。这是因为对于 $(P,\nu) \in \mathbf{Nil}(R)$，取 $R[t]$ 模 P，使得 t 的作用恰好是 ν，它是 $\mathbf{H}_{1,\{t^n\}}(R[t])$ 中的对象：挠性显然，消解由

$$0 \to P[t] \xrightarrow{1-\nu} P[t] \to P \to 0$$

给出。

反过来，对于任何 $M \in \mathbf{H}_{1,s}(R[t])$，其投射消解是 $0 \to P \to Q \to M \to 0$：由于 M 被某个 t^n 作用零化，将上述消解作用上 $- \otimes_{R[t]} R[t]/(t^n)$ 就有：

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{R[t]}(M, R[t]/(t^n)) \to P/t^nP \to Q/t^nQ \to M \otimes_{R[t]} R[t]/(t^n) \to 0$$

但是第一项就是 M：对 $0 \to R[t] \to R[t] \to R[t]/(t^n) \to 0$ 计算长正合列得到：

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{R[t]}(M, R[t]/(t^n)) \to M \xrightarrow{t^n} M \to M \otimes_{R[t]} R[t]/(t^n) \to 0$$

t^n 零化 M，因此这就说明第一项是 M。

现在就有短正合列：

$$0 \to M \to P/t^nP \to P/t^nQ \to 0$$

（注意 $\ker(Q/t^nQ \to M \otimes_{R[t]} R[t]/(t^n)) = P/t^nQ$）

然而 P/t^nP 是投射模，P/t^nQ 的投射 R-维数不超 1，那么 M 是投射模。

现在由第 1.2.3 节，这就说明了 $K_0\mathbf{Nil}(R) \cong K_0\mathbf{H}_{\{t^n\}}(R[t])$。 □

引理 1.5.5. 映射 $\cdot t : K_0(R) \to K_1(R[t,t^{-1}])$ 是分裂单射。

证明. 考虑

$$K_0(R) \xrightarrow{\cdot t} K_1(R[t,t^{-1}]) \xrightarrow{\partial} K_0\mathbf{Nil}(R) \to K_0(R)$$

这里后两个箭头是结合定理 1.5.1和上一命题得到的，一些计算说明它的确给出了提升。 □

注记. 这里的乘积是指自然的 $K_0(R) \otimes K_1(S) \to K_1(R \otimes S)$。它的构造是给定投射 R-模 P 和 S^m 的自同构，这能够被诱导为 $R \otimes S = (P \otimes S) \oplus (P' \otimes S)$ 上的自同构，一些验证说明良定义性，于是这就给出了乘积。

定理 1.5.6.

$$Nil_0(R) \cong NK_1(R),$$

于是

$$K_0\mathbf{Nil}(R) \cong K_0(R) \oplus NK_1(R)$$

证明. 我们有复合映射 δ（将下述映射复合）:

$$K_1(R[s], s) \to K_1(R[s]) \to K_1(R[s, s^{-1}])$$

以及 $(t = s^{-1})$

$$K_1(R[t, t^{-1}]) \xrightarrow{\partial} K_0(R[t] \text{ } on \text{ } \{t^n\}) \to Nil_0(R)$$

另一方面我们有：$\mathbf{Nil}(R)$ 到 $K_1(R[s])$ 的加性映射：$(P, \nu) \mapsto (\cdot(1 - \nu s)) \in Aut(P[s]) \to K_1(R[s])$，因此这给出了 $Nil_0(R) \to K_1(R[s], s)$，记为 τ。

我们来说明上述两个映射互逆。这只需承认如下引理，此时

$$\tau\delta([g]) = \tau\delta([1 - \nu s]) = \tau[(R^n, \nu)] = (1 - \nu s)$$

$$\delta\tau([(R^n, \nu)] - n[(R, 0)]) = \delta(1 - \nu s) = [(R^n, \nu)] - n[(R, 0)]$$

□

引理 1.5.7 (Higman's Trick). *$\forall g \in GL(R[t], t)$，存在幂零矩阵使得 $[g] = [1 - \nu t] \in K_1(R[t])$。*

证明. 这几乎是多项式环中元素可逆 $\iff$ 单位可逆，高阶幂零的高维版本的重述：[Wei13, III.3.5.1] □

下面我们将上述结果组装起来：

定理 1.5.8 (K_1 基本定理). *存在分裂满射 $K_1(R[t, t^{-1}]) \xrightarrow{\partial} K_0(R)$，其逆是 $[P] \mapsto [P] \cdot t$。并且这个映射组成了如下自然分裂的正合列：*

$$0 \to K_1(R) \xrightarrow{\Delta} K_1(R[t]) \oplus K_1(R[t^{-1}]) \xrightarrow{\pm} K_1(R[t, t^{-1}]) \xrightarrow{\partial} K_0(R) \to 0$$

于是 $K_1(R[t, t^{-1}]) \cong K_1(R) \oplus K_0(R) \oplus NK_1(R) \oplus NK_1(R)$

证明. $K_1(R) \to K_1(R[t]), K_1(R) \to K_1(R[t^{-1}])$ 的映射显然分裂（提升映射为赋值 $t = 1$）。定理 1.5.1给出了：

$$K_1(R[t]) \to K_1(R[t, t^{-1}]) \to K_0(\mathbf{Nil}(R))$$

现在左侧映射是单射，因为 $K_1(R[t]) \cong K_1(R) \oplus K_1(R[t], t)$（分裂性），并且 $K_1(R)$ 是 $K_1(R[t, t^{-1}])$ 的直和项，我们现在只需看 $K_1(R[t], t) \to K_1(R[t, t^{-1}])/K_1(R)$ 是否为单射。但这是因为定理 1.5.6中的同构穿过这个映射，于是这就说明了左侧映射单。

右侧项 $K_0(\mathbf{Nil}(R))$ 有直和分解，将这些组装起来就得到了结果。 □

一个有趣的事实是可以依次归纳地定义负数阶 K 理论：

定义 1.5.9 (负数阶 K 理论).

$$K_{-n}(R) := \operatorname{coker}(K_{-n+1}(R[t]) \oplus K_{-n+1}(R[t^{-1}]) \to K_{-n+1}(R[t,t^{-1}]))$$

为了说明负数阶 K 理论满足相似的基本定理，我们采用如下抽象后的定义进行论证：

定义 1.5.10 (缩并函子). 对于函子 $F : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Ab}$，定义

$$LF(R) = \operatorname{coker}(F(R[t]) \oplus F(R[t^{-1}]) \to F(R[t,t^{-1}]))$$

记下述序列为 $Seq(F,R)$：

$$0 \to F(R) \xrightarrow{\Delta} F(R[t]) \oplus F(R[t^{-1}]) \xrightarrow{\pm} F(R[t,t^{-1}]) \to LF(R) \to 0$$

称 F 是无环 (acyclic) 的，如果 $Seq(F,R)$ 对所有 R 都正合。称 F 是缩并函子，如果 F 无环并且满射 $F(R[t,t^{-1}]) \twoheadrightarrow LF(R)$ 存在一个对 t,R 都自然的分裂。

命题 1.5.11. *给定缩并函子之间的态射 $\eta : F \Rightarrow F'$，即交换图*

$$\begin{tikzcd}
LF(R) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "(L\eta)_R"'] & F(R[t,t^{-1}]) \arrow[d, "\eta_{R[t,t^{-1}]}"] \\
LF'(R) \arrow[r, "h'"] & F'(R[t,t^{-1}])
\end{tikzcd}$$

那么 $\ker\eta, \operatorname{coker}\eta$ 都是缩并函子。

特别地，取 η 为 $F(-[t]) \oplus F(-[t^{-1}]) \to F(-[t,t^{-1}])$ 的余核，注意缩并函子在直和下保持，于是这就说明 F 是缩并函子 $\implies LF$ 也是。

证明. $Seq(F,R) \to Seq(F',R)$ 是分裂正合列之间的映射，并且两个分裂是相容的。于是两个链映射的核和余核也是分裂正合列，那么这就直接说明了结果。 □

推论 1.5.12 (负数阶 K 理论基本定理).

$$0 \to K_{-n}(R) \xrightarrow{\Delta} K_{-n}(R[t]) \oplus K_{-n}(R[t^{-1}]) \xrightarrow{\pm} K_{-n}(R[t,t^{-1}]) \xrightarrow{\partial} K_{-n-1}(R) \to 0$$

类似地，通过不断对 Mayer-Vietoris 序列作用 L（取余核），我们有：

定理 1.5.13 (负数阶 K 理论 Mayer-Vietoris 序列). *条件同 Mayer-Vietoris 序列，我们可将其延长为：*

$$K_1(R) \xrightarrow{\Delta} K_1(S) \oplus K_1(R/I) \xrightarrow{\pm} K_1(S/I) \xrightarrow{\partial} K_0(R) \xrightarrow{\Delta} K_0(S) \oplus K_0(R/I) \xrightarrow{\pm} K_0(S/I)$$

$$\xrightarrow{\partial} K_{-1}(R) \xrightarrow{\Delta} K_{-1}(S) \oplus K_{-1}(R/I) \xrightarrow{\pm} K_{-1}(S/I) \xrightarrow{\partial} K_{-2}(R) \xrightarrow{\Delta} K_{-2}(S) \oplus K_{-2}(R/I) \xrightarrow{\pm} K_{-2}(S/I) \to \cdots$$

1.6 环的 K_2

定义 1.6.1 (环的 K_2). $K_2(R)$ 定义为 $\phi : St(R) \to E(R)$ 的核。这里 $St(R) = \varinjlim St_n(R)$，$St_n(R)$ 则是由 $x_{ij}(r), i \neq j, i, j \in \{1, \cdots, n\}$ 在如下关系下生成的群：

$$x_{ij}(r)x_{ij}(s) = x_{ij}(r+s)$$

$$[x_{ij}(r), x_{kl}(s)] = \begin{cases} 1 & j \neq k \text{ and } i \neq l \\ x_{il}(rs) & j = k \text{ and } i \neq l \\ x_{kj}(-sr) & j \neq k \text{ and } i = l \end{cases}$$

注意 $E(R)$ 中的初等矩阵 $e_{ij}(r)$ 也满足这一关系，因此我们自然有 $\phi_n : St_n(R) \to E_n(R)$，从而给出了满足要求的映射。特别地，有正合列：

$$0 \to K_2(R) \to St(R) \xrightarrow{\phi} GL(R) \to K_1(R) \to 0$$

定理 1.6.2 (Steinberg). $K_2(R)$ *恰好是* $St(R)$ *的中心。*

证明. 如果 $x \in St(R)$ 和每个 $St(R)$ 的元素都交换，那么其像和 $E(R)$ 的每个元素都交换。但 $E(R)$ 的中心平凡：[Wei13, EIII.1.8]，于是 $x \in K_2(R)$。

反过来如果 $y \in K_2(R)$，那么 $\phi(y) = 1$，从而 $\phi([y,p]) = \phi(p)\phi(p)^{-1} = 1, \forall p \in St(R)$。选择充分大的 n 使得 $y \in St_n(R)$，即被 $x_{ij}(r), i, j \leq$ 表出。现在对于 $p = x_{kn}(s)$，Steinberg 关系说明 $[y,p]$ 属于 $x_{in}(r), i < n$ 生成的子群 P_n 中。然而 ϕ 将 P_n 单地射入 $E(R)$ 中：[Wei13, EIII.5.2]。因此 $\phi([y,p]) = 1$ 就说明 $[y,p] = 1$。从而 y 和每个 $x_{kn}(s)$ 交换；对于 x_{nk} 同理。进一步 $x_{kl}(s) = [x_{kn}(s), x_{nl}(1)]$，这就说明了 y 和任何 $St(R)$ 中的元素交换。 □

我们发现 $St(R)$ 和群上同调以及中心扩张很有关系。

定义 1.6.3 (中心扩张). G 是一个群，A 是一个 Abel 群。G 被 A 的中心扩张是指一个正合列 $0 \to A \to X \xrightarrow{\pi} G \to 0$，使得 A 是 X 的中心。

称中心扩张分裂，如果它恰好是 $0 \to A \to A \times G \xrightarrow{pr} G \to 0$。

两个（G 被 A 的）扩张 X, Y 是等价的，如果 $f : X \to Y$ 限制在 A 上是 id 并诱导了 G 上的 id。

称中心扩张 $0 \to A \to X \to G \to 0$ 是泛中心扩张，如果对于任何其他中心扩张 $0 \to B \to Y \to G \to 0$，都存在唯一的扩张之间的映射（即 $f : X \to Y$ 使得 f 诱导到 G 上是 id）。

命题 1.6.4 (代数事实). *扩张的等价类和* $H^2(G, A)$ *一一对应。*G *有泛中心扩张当且仅当* G *是完美群，此时这个泛中心扩张形如*

$$0 \to H_2(G, \mathbb{Z}) \to [F, F]/[R, F] \to G \to 0$$

其中 $F/R \cong G$，F *是自由群，*R *是关系。*

定理 1.6.5 (Kervaire,Steinberg). $St(R)$ *是* $E(R)$ *的泛中心扩张，因此* $K_2(R) \cong H_2(E(R); \mathbb{Z})$。

命题 1.6.6.

$$K_2(R) \cong \varinjlim_{P \in t\mathbf{P}} H_2([Aut(P), Aut(P)]; \mathbb{Z})$$

证明. 这依然是共尾性保证的。 □

定理 1.6.7 (K 群长正合列)**.** *K 群长正合列可以延长到 K_2 项。*

定理 1.6.8 (Mayer-Vietoris)**.** *对于 $I, J \trianglelefteq R$，$I \cap J = 0$。$R, S = R/J$ 关于理想 I 构成 Milnor 方块，此时 Mayer-Vietoris 序列可以延长到 K_2 项。*

第二章 高阶 K 理论的经典构造

2.1 环的高阶 K 理论

定义 2.1.1 (环的 K 理论). 定义 $BGL(R)^+$ 为满足如下要求的 CW 复形 X 以及一个映射 $BGL(R) \to BGL(R)^+$：

1. $\pi_1(BGL(R))^+ \cong K_1(R)$，并且 $BGL(R) \to BGL(R)^+$ 的映射在 π_1 上诱导的是典范的 $GL(R) \twoheadrightarrow K_1(R)$。
2. 对于任何 $K_1(R)$-模 M，$H_*(BGL(R); M) \cong H_*(BGL(R)^+; M)$。

定义 K 理论空间为：$K(R) = K_0(R) \times BGL(R)^+$。定义环 R 的高阶 K 理论为 $K_n(R) = \pi_n BGL(R)^+, n \geq 1$，更进一步地：$K_n(R) = \pi_n K(R), n \geq 0$.

我们下来说明空间的 $+$-构造是如何进行的。

定义 2.1.2 ($+$-构造). X 是一个带基点的 CW 复形，P 是 $\pi_1(X)$ 的完美正规子群（在下文中除非特别指定 P，P 默认取为最大完美子群：它自动正规）。$f: X \to Y$ 称为 X（关于 P）的 $+$-构造，如果 f 的同伦纤维是同调可缩的，并且 $P = \ker(\pi_1(X) \to \pi_1(Y))$。

引理 2.1.3. *X, Y 是连通 CW 复形，那么 $f: X \to Y$ 的同伦纤维同调可缩 $\iff H_*(X, M) \cong H_*(Y, M)$ 对所有 $\pi_1(Y)$-模 M 成立。*

证明. Serre 谱序列，见 [Wei13, IV.1.6] □

注记. 由上述引理，明显将 $+$-构造应用到 $BGL(R)$ 上就得到了 $BGL(R)^+$。我们下面来说明 $+$ 构造的存在性和同伦唯一性：这能够帮助我们说明前文定义的确是良好的。

定理 2.1.4 (Quillen $+$-构造). *对于 $\pi_1(X)$ 的完美正规子群 P：*

1. *$+$-构造 $f: X \to Y$ 存在*
2. *如果 $f: X \to Y$ 是 X 关于 P 的 $+$-构造，$g: X \to Z$ 使得 $g_*(P) = 0 \in \pi_1(Z)$，那么存在同伦意义下唯一的映射 $h: Y \to Z$ 使得 $g = hf$*
3. *特别地，上述命题说明了任何两个 $+$-构造在同伦意义下唯一。*

证明. 我们先来说明存在性：

- 先设 $P = \pi_1(X)$，于是由 P 完美：$H_1(P; \mathbb{Z}) = 0$。此时分以下几步：

1. 取 P 的一组生成元 $\{\varphi_i\colon S^1 \to X\}_{i\in I}$，并且不妨设 φ_i 都打到 X 的一维骨架中
2. 沿着 φ_i 粘上一组二维胞腔 $\{e_i^2\}_{i\in I}$, 所得 CW 复形暂记作 X'. 于是 $\pi_1(X')=0$, 且空间对 (X',X) 的相对同调只在二阶非零, 被这些 e_i^2 自由生成
3. 由于 $H_1(X)=0$，有短正合列
$$0\to H_2(X)\to H_2(X')\to H_2(X',X)\to 0$$
取 e_i^2 在 $H_2(X')$ 的原像 ψ_i.
4. 由 Hurewicz 定理，$H_2(X')=\pi_2(X')$. 取映射 $\psi_i\colon S^2\to X'$ 代表 ψ_i，可不妨设 ψ_i 都打到 X' 的二维骨架中。
5. 再沿 ψ_i 粘上一组三维胞腔 $\{e_i^3\}_{i\in I}$, 所得 CW 复形就是 X_P^+, 则 $\pi_1(X_P^+)=\pi_1(X')=0$, 而由构造, X 到 X_P^+ 的自然含入映射诱导同调群的同构。

- 再看一般情况. 此时令 $\widetilde{X}_P$ 为 P 对应的 X 的覆叠，然后按上面的方法作 $\widetilde{X}_P^+\supseteq\widetilde{X}_P$, 再作推出 $X_P^+=X\cup_{\widetilde{X}_P}\widetilde{X}_P^+$。由于同调群的切除定理, 自然含入映射 $X\to X_P^+$ 诱导同调群的同构. 由 van Kampen 定理：
$$\pi_1(X_P^+)=\pi_1(X)\sqcup_{\pi_1(\widetilde{X}_P)}\pi_1(\widetilde{X}_P^+)=\frac{\pi_1(X)}{\langle gHg^{-1}\mid g\in\pi_1(X)\rangle}.$$

□

推论 2.1.5. 取纤维化的正合列 $\pi_2(BG)\to\pi_2(BG^+)\to\pi_1(Fib)\to G\to G/P\to 0$，而 $\pi_2(BG)=0$，并且 $\pi_2(BG^+)$ 是中心。但是 $\pi_1(Fib)$ 完美（因为 Fib 同调可缩），于是中心扩张的代数事实就说明了 $\pi_2 BGL(R)^+=H_2(GL(R),\mathbb{Z})$，从而和原有定义相符。

命题 2.1.6 (积，Loday)**.** 自然的张量积 $A^p\otimes B^q\cong(A\otimes B)^{pq}$ 诱导了
$$\varphi_{pq}:BGL_p(A)^+\times BGL_q(B)^+\to BGL_{pq}(A\otimes B)^+$$
，从而诱导了 $\gamma:K_p(A)\otimes K_q(B)\to K_{p+q}(A\otimes B)$.

这个乘积映射构造对 A,B 均有函子性，并且满足双线性性和结合性，同时如果 A 自身交换那么 $K_p(A)\otimes K_q(A)\to K_{p+q}(A\otimes A)\to K_{p+q}(A)$ 是分次交换的。

2.2 对称幺半范畴的高阶 K 理论：$B(S^{-1}S)$

定义 2.2.1 ($S^{-1}S$)**.** 对于对称幺半范畴 S，定义范畴 $S^{-1}S$ 如下：

$S^{-1}S$ 的对象形如 $(m,n),m,n\in Obj(S)$。态射是如下的等价类：
$$(m_1,m_2)\xrightarrow{s\otimes}(s\otimes m_1,s\otimes m_2)\xrightarrow{(f,g)}(n_1,n_2)$$
其中它和
$$(m_1,m_2)\xrightarrow{t\otimes}(t\otimes m_1,t\otimes m_2)\xrightarrow{(f',g')}(n_1,n_2)$$
等价是指如果存在 $\alpha:s\xrightarrow{\cong}t$ 使得 (f',g') 和 α 的复合给出了 (f,g)。

注记. $S^{-1}S$ 也是对称幺半范畴：$(m,n)\otimes(m',n')=(m\otimes m',n\otimes n')$。自然的函子 $S\to S^{-1}S: m\mapsto(m,e)$ 是幺半的。

定义 2.2.2 (对称幺半群胚的 K 理论). 对称幺半范畴 S 如果是群胚（每个态射都是同构），那么其 K 理论定义为：

$$K_n(S)=\pi_n(BS^{-1}S)$$

$BS^{-1}S$ 称为 K 理论空间。这里 B 是指范畴的几何实现，即：$|N\mathcal{C}|$（先取单纯脉，再取单纯集的几何实现）

2.2.1 BS 到 $BS^{-1}S$ 的过渡：群化

这套理论的起点是对于对称幺半范畴 S，其几何实现 BS 有着自然的 H-空间结构：这是因为

$$(BS)\times(BS)\cong B(S\times S)\to BS$$

是满足要求的乘积，其中最后一个箭头是由 S 上的幺半结构给出的，对称幺半范畴的公理恰好保证了这一乘积满足同伦交换、同伦结合性以及同伦单位元的存在性。

另一方面，我们注意到 $B(S^{-1}S)$ 上有着自然的同伦逆映射：这是由 $S^{-1}S\xrightarrow{inv}S^{-1}S$ 给出的。因此 K 理论空间的构造可以说是某种 BS 的群化，或者更抽象一点说，某个幺半群（或者 $\infty-$ 幺半群，H-空间）的群（∞-群）化。现在我们仅从 H-空间的情况入手，对于更一般的情况留至下一部分讨论。

定义 2.2.3 (群化). 称同伦结合 H-空间是群状 (group-like) 的，如果它有同伦逆。对于一个同伦交换、结合的 H-空间 X，其群化是指一个 H-空间 Y，以及一个 H-空间态射 $X\to Y$，使得 $\pi_0(Y)$ 是交换幺半群 $\pi_0(X)$ 的群化，并且对于任何交换环 k：

$$H_*(Y;k)\cong\pi_0(X)^{-1}H_*(X;k)$$

然而：CW 同伦结合 H-空间是群状的 $\iff$ π_0 是群。现在如果 X 是 CW 复形，我们进一步也要求 Y 是 CW 复形，那么定义自动要求 Y 也是群状的。

有关群化的完备性和唯一性，我们有如下两个结果：

引理 2.2.4 (群状的群化是自身). *X 是群状 H-空间，那么 X 是自身的群化，并且任何群化 $f:X\to Y$ 都是同伦等价。*

证明. 由定义，这是对 $\pi_1(X)$ 的平凡子群做 $+$ 构造，那么定理 2.1.4就说明了结果。 □

定理 2.2.5 (群化的唯一性). *X 是 H-空间使得 $\pi_0(X)$ 是可数的（或者存在可数的共尾子幺半群），那么对于任何两个群化 $f':X\to X', f'':X\to X''$，存在同伦等价 $g:X'\to X''$（在弱同伦等价下唯一），使得 gf' 和 f'' 是弱同伦等价的。并且 g 也弱同伦等价于一个 H-空间映射。*

例子. *$\mathbb{Z}\times BGL(R)^+$ 是 H-空间 $S=\coprod GL_n(R)$ 的群化。*

接下来我们主要的目标是说明在上述群化的意义下：$BS^{-1}S$ 是 BS 的群化。

定义 2.2.6. 称幺半范畴 S 作用在另一个范畴 X 上，如果存在函子 $\Box : S \times X \to X$，使得存在自然同构 $s\Box(t\Box x) \cong (s\Box t)\Box x$，$e\Box x \cong x$ 并满足若干融贯性条件。

此时定义范畴 $<S, X>$ 如下：对象和 X 相同，x 到 y 的态射是如下偶对的等价类

$$(s, s\Box x \xrightarrow{\phi} y)$$

等价是指存在 $\alpha : s \cong s'$ 使得它和 ϕ 的复合给出了 ϕ'。

对于 S 在 X 上的作用，它自然诱导了 S 在 $S \times X$ 上的作用（在每个分量上都有作用：前者由幺半结构给出）。记 $S^{-1}X =< S, S \times X >$：容易看出这和 $S^{-1}S$ 的记法是相容的。S 在 $S^{-1}X$ 上有自然的作用：$s\Box(t, x) = (s \otimes t, x)$。

定理 2.2.7 (Quillen). 如果 S 是群胚，并且每个平移诱导的 $Aut(s) \to Aut(s \otimes t)$ 都是单射，那么：

$$(\pi_0 S)^{-1} H_q(X) \to H_q(S^{-1}X)$$

对任何 X, q 都是同构。

作为推论：$B(S^{-1}S)$ 是 BS 的群化：取 $X = S$ 即可。

证明. 投影函子 $\rho : S^{-1}X \to< S, S >$ 诱导了纤维列 $X \to S^{-1}X \to< S, S >$。那么计算其 Serre 谱序列就给出了结果。 □

2.2.2 + 构造与 $BS^{-1}S$

取 $S = \mathbf{F}(R) = \coprod GL_n(R)$ 为有限生成自由 R-模的幺半范畴的极大子群胚：那么

定理 2.2.8. 对于 $S = \coprod GL_n(R)$，$K(S) = B(S^{-1}S)$ 是 $BS = \coprod BGL_n(R)$ 的群化，并且

$$B(S^{-1}S) \simeq \mathbb{Z} \times BGL(R)^+$$

证明. 为了应用 H-空间群化的唯一性，我们只需构造一个 $BGL(R) \to B(S^{-1}S)$ 的诱导上同调之间同构的映射。现在由于几何实现是左 Kan 扩张，它是左伴随从而保持余极限。因此 $BGL(R) = \mathrm{hocolim} BGL_n(R)$：即 $BGL_n(R)$ 的映射望远镜 (mapping telescope)。

现在我们构造 $BGL_n(R) \to B(S^{-1}S)$ 的映射：这是通过 $GL_n(R) \to Aut_{S^{-1}S}(R^n, R^n)$ 诱导的 $BGL_n(R) \to B(S^{-1}S)$ 完成的，并且这一系列映射在 n 变动下是交换的：即：

$$\begin{tikzcd}
GL_n(R) \arrow[r] \arrow[d] & Aut(R^n, R^n) \arrow[d, "\oplus(R,R)"] \\
GL_{n+1}(R) \arrow[r] & Aut(R^{n+1}, R^{n+1})
\end{tikzcd}$$

因此取余极限，就给出了一个 $BGL(R) \to B(S^{-1}S)$ 的映射。它射入了单位元在 $B(S^{-1}S)$ 中的所处的连通分支，记为 Y_S。

我们现在来证明 $BGL(R) \to Y_S$ 诱导了 $\mathbb{Z}$-系数同调的同构。那么唯一性定理定理 2.1.4就说明了结果。由定理 2.2.7，$H_* B(S^{-1}S)$ 是 $H_*(BS)$ 在 $\pi_0(S) = \{e^n\}$ 处的局部化，其中 $e \in \pi_0 BS$ 是一个生成元。

但是这个局部化就是 $H_*(Y_S) \otimes \mathbb{Z}[e, e^{-1}]$，其中 e 含义同前。于是这就说明 $H_*(Y_S) \cong H_*(BS) \cong H_*(BGL(R))$。 □

或者更一般地：

定理 2.2.9. *S 是对称幺半群胚，每个平移诱导的 $Aut(s) \to Aut(s \otimes t)$ 是单射。并且更进一步：S 中有可数个对象 $s_1, \cdots$，使得 $s_{n+1} = s_n \otimes a_s, \exists a_s \in S$，并且 $\forall s \in S$，$\exists s', n, \text{s.t.} s \otimes s' \cong s_n$。此时定义 $Aut(S) = \operatorname{colim} Aut_S(s_n)$，那么：*

交换子群 $E \leq Aut(S)$ 是完美正规子群，$K_1(S) = Aut(S)/E$，$(BAut(S))^+$ 是 $K(S)$ 中单位元的连通分支，于是

$$K(S) \simeq K_0(S) \times (BAut(S))^+$$

我们下面来处理共尾性：

定义 2.2.10. 幺半函子 $f : S \to T$ 称为共尾的，如果对每个 $t \in T, \exists t', s, s.t. t \otimes t' \cong f(s)$。

定理 2.2.11 (共尾性)**.** *如果 $f : S \to T$ 是共尾的：那么*

1. *T 作用到 X 上，那么 S 通过 f 也有在 X 上的作用。那么 $S^{-1}X \simeq T^{-1}X$*
2. *如果 $Aut_S(s) \cong Aut_T(f(s))$，那么 $K(S)$ 和 $K(T)$ 的单位元所在连通分支是同伦等价的，于是 $K_n(S) \cong K_n(T), \forall n \geq 1$。*

证明. 第一部分由定义验证。第二部分则是因为 $H_*(Y_S) = \operatorname{colim} H_*(BAut(s))$，但是由共尾性它就是 $\operatorname{colim} H_*(BAut(f(s)))$，从而是 $H_*(Y_T)$。但是 H-空间之间的诱导同调同构的映射是同伦等价，这就说明了结果。[1] □

推论 2.2.12. *由于 $\mathbf{F}(R) \to \mathbf{P}(R)$ 是共尾的，并且上述命题的条件被满足。这就说明了 $\mathbf{F}(R)$ 的 K 理论空间和 $\mathbf{P}(R)$ 相同。*

2.2.3 有趣的例子

例子. *考虑 $S = \coprod \Sigma_n = \mathbf{Sets}_{fin}$，其中后者是指有限集范畴的极大子群胚。再考虑无穷置换群 $\Sigma_\infty = \operatorname{colim} \Sigma_n$，那么仿照证明环的 K 理论和 $\mathbf{F}(R)$ 的 K 理论相容的方法，我们可以再次说明：$B(S^{-1}S) \simeq K(\mathbf{Sets}_{fin})$ 和 $\mathbb{Z} \times (B\Sigma_\infty)^+$ 同伦等价。更进一步地还有如下三者等价 (Barratt-Priddy-Quillen)*[2]：

1. *$B\mathbf{Sets}_{fin}$ 的群化：$K(\mathbf{Sets}_{fin})$*
2. *$\mathbb{Z} \times B\Sigma_\infty^+$*
3. *$\Omega^\infty \mathbb{S} = \lim \Omega^n S^n$*

于是 $K_n(\mathbf{Sets}_{fin}) = \pi_n^s$。

[1] 同调 Whitehead 定理，见https://mathoverflow.net/questions/283970/attribution-of-theorem-saying-that-inducing-i

[2] BPQ 定理的证明：https://www.math.uwo.ca/faculty/jardine/preprints/preprint-barratt2.pdf

2.3 正合范畴的高阶 K 理论：Quillen Q-构造

定义 2.3.1 ($Q\mathcal{A}$). 对于正合范畴 $\mathcal{A}$，定义 $Q\mathcal{A}$ 如下：其对象和 $\mathcal{A}$ 相同，A 到 B 的态射为如下形式图表的等价类：

$$A \twoheadleftarrow I \hookrightarrow B$$

其中等价关系是指图表间的映射使得在 I 上是同构，A, B 上是 id。

$A \twoheadleftarrow I \hookrightarrow B$ 和 $B \twoheadleftarrow J \hookrightarrow C$ 的复合是通过取：$K = I \times_B J$ 给出的 $A \twoheadleftarrow K \hookrightarrow C$ 完成的。

$$\begin{tikzcd}
 & & C \\
 & K \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & J \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads] \\
A & I \arrow[l, two heads] \arrow[r, hook] & B
\end{tikzcd}$$

命题 2.3.2. *$BQ\mathcal{A}$ 是一个连通 CW 复形，并且 $\pi_1(BQ\mathcal{A}) \cong K_0(\mathcal{A})$。其中对应于 $[A] \in K_0(\mathcal{A})$ 的 $\pi_1(BQ\mathcal{A})$ 的元素由 $0 \hookrightarrow A \twoheadrightarrow 0$ 表出。这里 $Q\mathcal{A}$ 中的（容许）单、满射是通过上一定义中将 I 取为 A（或 B）得到的。*

证明. 这个命题的主要证明步骤是如下引理：如果 T 是范畴 C 的极大树，那么 $\pi_1(BC)$ 有如下展示：它由每个 C 中的态射 f 生成，记为 $[f]$，商去的关系为：

1. $[t] = 1, \forall t \in T, [\mathrm{id}_c] = 1, \forall c \in C$
2. $[f] \cdot [g] = [f \circ g], \forall f, g \in C$

这是因为第一条关系给出了 BC 的 1-骨架的基本群，第二条关系源于 BC 的 2-胞腔。

然而考虑零对象出发的单射 $0 \hookrightarrow A \in Q\mathcal{A}$，这构成了一个极大树。因此由上述引理，我们就能够说明结果。 □

定义 2.3.3 (正合范畴的 K 理论). $\mathcal{A}$ 是小正合范畴，$K\mathcal{A} = \Omega BQ\mathcal{A}$，并定义

$$K_n(\mathcal{A}) = \pi_n K\mathcal{A} = \pi_{n+1}(BQ\mathcal{A})$$

构造的函子性源于 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 诱导了 $Q\mathcal{A} \to Q\mathcal{B}$。

注记. 这里有集合论困难：在 $\mathcal{A}$ 不是小范畴的时候我们前面在证明 $\pi_1 K = K_0$ 时会遇到极大树大小超出集合的困难。因此对于这样的范畴我们将其 K 理论空间替换为 $K(\mathcal{A}')$，其中 $\mathcal{A}'$ 的对象由 $\mathcal{A}$ 对象的同构类组成：这里我们假定这样的同构类构成了集合。那么 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 等价，并且 $K(\mathcal{A}')$ 和 $\mathcal{A}'$ 的选取无关。

命题 2.3.4 (共尾性). *$\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的正合子范畴，在扩张下封闭。更进一步它共尾（即 $\forall A \in \mathcal{A}, \exists A' \in \mathcal{A}, \text{s.t.} A \oplus A'' \in \mathcal{B}$。那么 $BQ\mathcal{B}$（同伦等价于）$BQ\mathcal{A}$ 中对应子群 $K_0(\mathcal{B}) \leq K_0(\mathcal{A}) = \pi_1(BQ\mathcal{A})$ 的覆叠。*

因此 $K_n(\mathcal{B}) \cong K_n(\mathcal{A}), \forall n > 0$。

2.3.1 QQ 构造与乘积

定义 2.3.5. $\mathcal{A}$ 是小正合范畴，$QQ\mathcal{A}$ 定义为如下 2-范畴：其 2-态射形如如下图表的等价类，其中等价是指图表之间的同构映射并且限制在四个角上是恒等映射：

$$\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, two heads] \arrow[r, hook] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, two heads] \arrow[d, hook] & \bullet \arrow[l, two heads] \arrow[r, hook] \arrow[u, two heads] \arrow[d, hook] & \bullet \arrow[u, two heads] \arrow[d, hook] \\
\bullet & \bullet \arrow[l, two heads] \arrow[r, hook] & \bullet
\end{tikzcd}$$

注记. 这里我们采用的 2-范畴模型是单纯集模型（因此准确地说是 $(2,1)$-范畴），这里的 2-态射我们指定的恰好就是 $\Delta^1 \times \Delta^1$ 的映入方式。

定理 2.3.6 (Waldhausen)**.**

$$\Omega BQQ\mathcal{A} \simeq BQ\mathcal{A}$$

更进一步我们还能够仿照 QQ 构造继续定义 $Q^n\mathcal{A}$，并且也满足 $\Omega BQ^{n+1}\mathcal{A} \simeq BQ^n\mathcal{A}$。于是我们有一列 $BQ^n\mathcal{A}$（$n=0$ 时取为 $\Omega BQ\mathcal{A}$，它们给出了一个 Ω-谱 $\mathbf{K}(\mathcal{A})$，并且 $K(\mathcal{A})$ 是无穷环路空间。

定义 2.3.7. 给定双正合函子 $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$，它们诱导了 $Q\mathcal{A} \otimes Q\mathcal{B} \to bi(Q\mathcal{C})$，但是它穿过 $QQ\mathcal{C}$，因此这就给出了：$Q\mathcal{A} \otimes Q\mathcal{B} \to QQ\mathcal{C}$。

具体来说：$A_0 \twoheadleftarrow A_1 \hookrightarrow A_2, B_0 \twoheadleftarrow B_1 \hookrightarrow B_2$ 映为：

$$\begin{tikzcd}
A_0 \otimes B_0 & A_1 \otimes B_0 \arrow[l, two heads] \arrow[r, hook] & A_2 \otimes B_0 \\
A_0 \otimes B_1 \arrow[u, two heads] \arrow[d, hook] & A_1 \otimes B_1 \arrow[l, two heads] \arrow[r, hook] \arrow[u, two heads] \arrow[d, hook] & A_2 \otimes B_1 \arrow[u, two heads] \arrow[d, hook] \\
A_0 \otimes B_2 & A_1 \otimes B_2 \arrow[l, two heads] \arrow[r, hook] & A_2 \otimes B_2
\end{tikzcd}$$

现在将几何实现作用在这个映射上：$BQ\mathcal{A} \times BQ\mathcal{B} \to BQQ\mathcal{C}$。通过进一步要求双正合函子 F 将 $(A,0)$ 映为 $0; (0,B)$ 映为 0（这总可以通过进行某些范畴等价的替换完成），上述映射将 $Q\mathcal{A} \otimes 0, 0 \otimes Q\mathcal{B}$ 都映为 0，于是 $BQ\mathcal{A} \times 0, 0 \times BQ\mathcal{B}$ 都被映为 0，因此这给出了映射：

$$BQ\mathcal{A} \wedge BQ\mathcal{B} \to BQQ\mathcal{C}$$

进一步它可以延展为 K 理论谱 $\mathbf{K}(\mathcal{A}) \wedge \mathbf{K}(\mathcal{B}) \to \mathbf{K}(\mathcal{C})$ 之间的映射。于是这给出了：

$$K_i(\mathcal{A}) \otimes K_j(\mathcal{B}) = \pi_{i+1}(BQ\mathcal{A}) \otimes \pi_{j+1}(BQ\mathcal{B}) \to$$

$$\pi_{i+j+2}(BQ\mathcal{A} \wedge BQ\mathcal{B}) \to \pi_{i+j+2}(BQQ\mathcal{C}) \cong K_{i+j}(\mathcal{C})$$

2.3.2 $+ = Q$

对于正合范畴 $\mathcal{A}$，一方面我们可以用 $B(S^{-1}S)$ 构造给出 K 理论空间：取 $S = \mathrm{iso}\mathcal{A}$（幺半结构由直和给出）；另一方面我们可以用 Quillen Q 构造给出一个 K 理论空间。

通过对比 K_0 我们发现，这两个构造并不一定相同。但是如果 $\mathcal{A}$ 是分裂正合范畴（所有短正合列都分裂）那么 K_0 的确相同。我们现在来说明这个结果：

定理 2.3.8 (Quillen $+ = Q$). $\mathcal{A}$ 是分裂正合范畴，$S = iso\mathcal{A}$，那么 $\Omega BQ\mathcal{A} \simeq B(S^{-1}S)$，即 $K_n(\mathcal{A}) \cong K_n(S)$。

推论 2.3.9. 取 $\mathcal{A} = \mathbf{P}(R)$，那么这就说明了 $K_n(R) \cong K_n\mathbf{P}(R)$。

我们下面来证明这个结果：

定义 2.3.10. 给定正合范畴 $\mathcal{A}$，定义 $\mathcal{E}\mathcal{A}$ 如下：其对象为 $\mathcal{A}$ 中的正合列，两个正合列 $E' : (A' \to B' \to C')$ 到 $E : (A \to B \to C)$ 的态射定义为如下图表的等价类，其中等价关系由图表之间的同构给出并且其在除了 C'' 外的所有元素处限制都是恒等映射。

$$\begin{tikzcd}
E' : \arrow[dd] & A' \arrow[r, hook] & B' \arrow[r, two heads] & C' \\
 & A \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & B' \arrow[u, equal] \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & C'' \arrow[u, two heads] \arrow[d, hook] \\
E : & A \arrow[r, hook] & B \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

注意最右侧实际上是 $Q\mathcal{A}$ 中的一个态射。我们记 $\mathcal{E}_C$ 为 $\mathcal{E}$ 中全体第三项是 C 的对象，态射满足 $C' = C'' = C$ 并且其间的箭头都是 id 张成的子范畴的极大子群胚。因此 $\mathcal{E}_C$ 中的态射形如

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, hook] & B' \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\beta", "\cong"'] & C' \\
A \arrow[u, "\alpha", "\cong"'] \arrow[r, hook] & B' \arrow[r, two heads] & C'' \arrow[u, two heads]
\end{tikzcd}$$

特别地：$\mathcal{E}_0 = \mathrm{iso}A$：这是因为其中对象都形如 $A \to A \to 0$，其间态射都是同构。更一般地：对任何 C，$\mathcal{E}_C$ 都是对称幺半范畴，并且存在忠实幺半函子 $\eta_C : S \to \mathcal{E}_C : (A \mapsto A \to A \oplus C \to C)$。这是因为幺半结构由如下给出：对于 $E_i = (A_i \to B_i \to C)$，$E_1 \otimes E_2 = (A_1 \oplus A_2 \to B_1 \times_C B_2 \to C)$ 即满足要求。

引理 2.3.11. 如果 $\mathcal{A}$ 是分裂正合的，那么 $S^{-1}S \to S^{-1}\mathcal{E}_C$ 诱导了同伦等价。这里 $S = isoA$。

证明. 这件事的直观自然是 $\mathcal{E}_C$ 中的元素在分裂正合范畴中都来自于 η_C 的像。

投影给出了纤维化 $S^{-1}S \to S^{-1}\mathcal{E}_C \to < S, \mathcal{E}_C >$。于是只需证明 $L =< S, \mathcal{E}_C >$ 是可缩的。这是因为 L 有着 $\mathcal{E}_C$ 诱导的幺半结构。因此 BL 是 H-空间，但是 L 是连通的（因为 $\mathcal{E}_C$ 中的每个元素都来自 η_C，于是每个 $x = (0 \to C \to C)$ 到 $y = (A \to B \to C)$ 的态射都由 $(s, s \otimes x = y)$ 见证：其中 $s = A$，那么此时 $s \otimes x = y$）于是 BL 是群状的。

现在考虑 L 上的幺半结构给出的自然变换 $E \to E \otimes E$，因此这给出了 id 和乘 2 映射之间的同伦。由于同伦逆（群状），这说明零映射和恒等映射同伦，于是 BL 可缩。 □

引理 2.3.12. 对于每个 $Q\mathcal{A}$ 中的态射 $\varphi : C' \to C$，它诱导了 $\varphi^* : \mathcal{E}_C \to \mathcal{E}_{C'}$，以及一个自然变换 $\eta_E : \varphi^* \implies \iota_{\mathcal{E}_C}$：它由 $\varphi^*(E) \to E$ 给出。

证明. 我们来构造 φ^*：选定一个 $C' \twoheadleftarrow C'' \hookrightarrow C$。取 $B' = B \times_C C''$，那么这给出了 $A \hookrightarrow B' \twoheadrightarrow C''$：它是 $\mathcal{A}$ 中的正合列。同样考虑复合 $B' \twoheadrightarrow C'' \twoheadrightarrow C'$，取它的核给出 $A' \hookrightarrow B' \twoheadrightarrow C'$。那么定义：

$$\varphi^*(A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C) = (A' \hookrightarrow B' \twoheadrightarrow C')$$

□

定理 2.3.13. $\mathcal{A}$ 是分裂正合范畴，$S = iso\mathcal{A}$，那么：

$$S^{-1}S \to S^{-1}\mathcal{E}\mathcal{A} \xrightarrow{T} Q\mathcal{A}$$

这里 T 的定义是由 $t : \mathcal{E}\mathcal{A} \to Q\mathcal{A}$（映至正合列第三项）给出的：因为对任何 A'，$t(A' \otimes E) = t(E)$，所以这个映射穿过 $S^{-1}\mathcal{E}\mathcal{A}$。

特别地，上一命题说明 $t : \mathcal{E}\mathcal{A} \to Q\mathcal{A}$ 以 φ^* 为水平移动构成了纤维范畴。

证明. 由 Quillen 定理 B，我们只需说明 φ^* 诱导了同伦等价。特别地，只需假定 φ 形如 $0 \hookrightarrow C$ 和 $0 \twoheadleftarrow C$。

对于第一种情况，$S^{-1}S \to S^{-1}\mathcal{E}_C$ 和 $\varphi^* : S^{-1}\mathcal{E}_C \to S^{-1}S (= S^{-1}\mathcal{E}_0)$ 的复合给出了 id，但已证前者是同伦等价，这就说明了 φ^* 也是。

对于第二种情况，$\varphi^* : S^{-1}S \to S^{-1}\mathcal{E}_C$ 和同伦等价 $S^{-1}S \to S^{-1}\mathcal{E}_C$ 的逆复合给出了 $A \mapsto A \oplus C$。但是前文已证存在 $S^{-1}S$ 中 $A \mapsto A \oplus C$ 的自然变换，于是这就给出了结果。

因此 Quillen 定理 B 就说明了结果。 □

$+ = Q$ 的证明. 只需证明 $S^{-1}\mathcal{E}\mathcal{A}$ 可缩。但这是因为 $\mathcal{E}\mathcal{A}$ 可缩以及 S 可逆地作用在其上。 □

这样我们就完成了 $+ = Q$ 定理的证明，更进一步地，可以证明两种构造的乘积结构也相符。

2.4 Waldhausen 范畴的高阶 K 理论：Waldhausen $wS_\bullet$ 构造

定义 2.4.1. $\mathcal{C}$ 是余纤维化范畴，我们定义 $S_n\mathcal{C}$ 为如下范畴：其对象 $A_\bullet$ 为一列余纤维化：

$$A_\bullet : 0 = A_0 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow A_n$$

态射为两个序列之间的态射族。

当 $\mathcal{C}$ 是 Waldhausen 范畴时，我们现在说明 $S_n\mathcal{C}$ 是 Waldhausen 范畴。

首先对于每个 $A_\bullet$，指定好一个商 $A_{ij} = A_j/A_i$，使得诸 A_{ij} 相容（注意余纤维化范畴都有余核）：即有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
& & & & A_{n-1,n} \\
& & & \cdots \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[u, two heads] \\
& & A_{23} \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & A_{2n} \arrow[u, two heads] \\
& A_{12} \arrow[r, hook] & A_{13} \arrow[u, two heads] \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & A_{1n} \arrow[u, two heads] \\
A_1 \arrow[r, hook] & A_2 \arrow[u, two heads] \arrow[r, hook] & A_3 \arrow[u, two heads] \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & A_n \arrow[u, two heads]
\end{tikzcd}$$

$A_\bullet \to B_\bullet$ 称为弱等价，如果每个 $A_i \to B_i$（于是 $A_{ij} \to B_{ij}$ 都是 $\mathcal{C}$ 中的弱等价。

$A_\bullet \to B_\bullet$ 称为余纤维化，如果对于每个 $0 \le i < j < k \le n$：

$$(A_{ij} \hookrightarrow A_{ik} \twoheadrightarrow A_{jk}) \to (B_{ij} \hookrightarrow B_{ik} \twoheadrightarrow B_{jk})$$

满足 $A_{ij} \to B_{ij}, A_{jk} \to B_{jk}, B_{ij} \cup_{A_{ij}} A_{ik} \to B_{ik}$ 是余纤维化.

我们定义函子 $\partial_0 : S_n\mathcal{C} \to S_{n-1}\mathcal{C}$ 为删去上述阶梯状图表的最下一行。即：

$$\partial_0(A_\bullet) : 0 = A_11 \hookrightarrow A_{12} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow A_{1n}$$

并配合上相应的 A_{ij}。

更进一步地，定义 $\partial_i : S_n\mathcal{C} \to S_{n-1}\mathcal{C}$ 为删去 A_{i*} 所在的行以及包含 A_i 的一列。

类似地，定义 $s_i : S_n\mathcal{C} \to S_{n+1}\mathcal{C}$ 为重复 A_i，并相应的定义 $A_{i,i+1} = 0$。

可以验证 ∂_i, s_i 都是正合函子。诸多 $S_n\mathcal{C}$ 构成了一个单纯范畴 $S_\bullet\mathcal{C}$。进一步，弱等价张成的子范畴 wS_n 也一起构成了一个单纯范畴 $wS_\bullet\mathcal{C}$，其几何实现 $|wS_\bullet\mathcal{C}|$ 为 $\mathbf{Cat}^{\Delta^{op}}$ 的几何实现，它同构于 $\coprod B(wS_n\mathcal{C}) \times \Delta^n/\sim$。

命题 2.4.2. *$\mathcal{C}$ 是 Waldhausen 范畴，$\pi_1|wS_\bullet\mathcal{C}| \cong K_0(\mathcal{C})$*

证明. 对于单纯空间 $X_\bullet$ 使得 X_0 是一点，那么 $|X_\bullet|$ 连通，并且 $\pi_1|X_\bullet|$ 由 $\pi_0(X_1)$ 的元素生成，商去 $\partial_1(x) = \partial_2(x)\partial_0(x), \forall x \in \pi_0(X_2)$。

现在看 $X_\bullet = BwS_\bullet\mathcal{C}$，那么 $\pi_0(BwS_1\mathcal{C})$ 恰好是对象的弱等价类，$\pi_0(BwS_2\mathcal{C})$ 恰好是余纤维序列。那么由定义这就说明了结果。 □

定义 2.4.3 (Waldhausen 范畴的 K 理论)**.** $\mathcal{C}$ 是小 Waldhausen 范畴，其其 K 理论空间定义为：

$$K(\mathcal{C}) = \Omega|wS_\bullet\mathcal{C}|$$

$$K_n(\mathcal{C}) = \pi_n K(\mathcal{C}) = \pi_{n+1}|wS_\bullet\mathcal{C}|$$

定义 2.4.4 (相对 K 理论空间)**.** $f : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 是正合函子，取 $S_n f = S_n\mathcal{B} \times_{S_n\mathcal{C}} S_{n+1}\mathcal{C}$。其中 $S_{n+1}\mathcal{C} \to S_n\mathcal{C}$ 由 ∂_0 给出。

于是这就给出了一个序列 $\mathcal{C} \to S_\bullet f \to S_\bullet\mathcal{B}$。其中第一个箭头是 $C \mapsto (0, C = \cdots = C)$。作用上 $S_\bullet$ 得到：

$$S_\bullet\mathcal{C} \to S_\bullet(S_\bullet f) \to S_\bullet(S_\bullet\mathcal{B})$$

以及

$$wS_\bullet\mathcal{C} \to wS_\bullet(S_\bullet f) \to wS_\bullet(S_\bullet\mathcal{B})$$

特别地，双单纯集也能够给出一个同伦纤维序列，因此我们可以取 $K(f) = \Omega^2|wS_\bullet S_\bullet f|$，那么 $\pi_n K(f) = K_n(f)$ 能够放入长正合列

$$\cdots \to K_0(f) \to K_0(\mathcal{B}) \to K_0(\mathcal{C}) \to K_{-1}(f) \to 0$$

中。

定理 2.4.5. *当 $f = \mathrm{id}$ 时 $wS_\bullet f$ 是可缩的：*

推论 2.4.6. *对 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 应用前述结果就说明：$|wS_\bullet\mathcal{C}| \simeq \Omega|wS_\bullet S_\bullet\mathcal{C}|$。*

更进一步，考虑

$$\Omega|wS_\bullet\mathcal{C}|, |wS_\bullet\mathcal{C}|, |wS_\bullet S_\bullet\mathcal{C}|, \cdots$$

给出了一个连合 Ω-谱 $\mathbf{K}(\mathcal{C})$，称为 $\mathcal{C}$ 的 K 理论谱。

2.5 Waldhausen 范畴 K 理论的基本性质

加性定理

定义 2.5.1. 称 Waldhausen 范畴之间的函子 $F', F, F'' : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 给出了一个短正合列 $F' \to F \to F''$，如果它在每个 $B \in \mathcal{B}$ 上的作用都给出了余纤维列，并且每个余纤维化 $A \hookrightarrow B$ 都满足 $F(A) \cup_{F'(A)} F'(B) \to F(B)$ 是余纤维化。

定理 2.5.2 (加性定理)**.** *$F' \to F \to F''$ 是函子的短正合列。那么作为 H-空间映射：$F_* \simeq F'_* + F''_*$，从而诱导了群同态之间的加法。*

局部化

定义 2.5.3 (扩张公理)**.** Waldhausen 范畴 $\mathcal{C}$ 满足扩张公理，如果对任何余纤维列之间的映射 $f : (A \to B \to C) \to (A' \to B' \to C')$，如果 $A \to A', C \to C'$ 是弱等价，那么 $B \to B'$ 也是弱等价。

定义 2.5.4 (映射柱函子)**.** $\mathcal{C}$ 是 Waldhausen 范畴，一个映射柱函子 T 是一个箭头范畴出发 $\mathcal{C}/\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 的函子，配备上自然变换 $j_1 : s \Rightarrow T, j_2 : t \Rightarrow T, p : T \Rightarrow t$，满足对每个 $f : A \to B$，有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "f"'] & T(f) \arrow[d, "p"] & B \arrow[l, "j_2"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_B"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

同时满足：

1. $T(0 \hookrightarrow A) = A$，并且 p, j_2 诱导了 $\mathrm{Hom}(0 \to A, 0 \to B), \mathrm{Hom}(A, B)$ 之间的自言同构。

2. $j_1 \coprod j_2 : A \coprod B \hookrightarrow T(f)$ 是余纤维化，$\forall f : A \to B$

3. 给定 $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ 对象之间的态射 $(a, b) : f \to f'$（其中 a, b 描述首尾之间的态射）如果 a, b 是弱等价，那么 $T(f) \to T(f')$ 也是。

4. 给定 $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ 对象之间的态射 $(a, b) : f \to f'$，如果 a, b 是余纤维化，那么 $T(f) \to T(f')$ 和如下态射
$$A' \coprod_A T(f) \coprod_B B' \to T(f')$$
（其中推出的存在性由第二条性质保证）都是余纤维化

定义 2.5.5 (柱公理)**.** $p : T(f) \to B$ 是弱等价。

定理 2.5.6 (Waldhausen 局部化定理)**.** *$\mathcal{A}$ 是余纤维化范畴，并配备了两个弱等价 $v(\mathcal{A}) \subseteq w(\mathcal{A})$，使得在 v, w 下 $\mathcal{A}$ 都成为 Waldhausen 范畴。如果 (A, w) 满足柱公理，$w(\mathcal{A})$ 满足饱和和扩张公理，那么*
$$K(\mathcal{A}^w) \to K(\mathcal{A}, v) \to K(\mathcal{A}, w)$$
是同伦纤维化，其中 $\mathcal{A}^w$ 是全体使得 $0 \to \mathcal{A}$ 是弱等价的元素张成的满子范畴。

定理 2.5.7 (Gillet-Waldhausen: 链复形范畴). $\mathcal{A}$ 是正合范畴，在取满射的核下封闭。那么 $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{Ch}^b(\mathcal{A})$ 诱导了 K 理论空间之间的同伦等价。

定理 2.5.8 (共尾性). $(\mathcal{A}, v)$ 是 *Waldhausen* 范畴，携带有映射柱函子满足柱公理。如果有满射 $\pi : K_0(\mathcal{A}) \to G$，$\mathcal{B}$ 为使得 $\pi[B] = 0$ 的对象张成的满子范畴。

那么 $vS_\bullet\mathcal{B} \to vS_\bullet\mathcal{A} \to BG$ 以及其解环 $K(\mathcal{B}) \to K(\mathcal{A}) \to \Omega BG = G$ 是同伦纤维。

特别地 $K_n(\mathcal{B}) \cong K_n(\mathcal{A}), n > 0$，并且 $0 \to K_0(\mathcal{B}) \to K_0(\mathcal{A}) \to G \to 0$ 是短正合列。

逼近定理

定理 2.5.9 (逼近定理). $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是饱和 *Waldhausen* 范畴之间的正合函子，满足

1. 态射 f 是弱等价 $\iff$ 其像 $F(f)$ 是弱等价
2. $\mathcal{A}$ 存在满足柱公理的映射柱函子
3. 如下逼近提升性质 *(App)* 成立：$\mathcal{B}$ 中态射 $b : F(A) \to V$ 可以分解为 $\mathcal{A}$ 重余纤维化 $a : A \hookrightarrow A'$ 在 F 下的像和弱等价 $F(A') \hookrightarrow B$。

那么 $wS_\bullet\mathcal{A} \to wS_\bullet\mathcal{B}$，于是 $K(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$ 都是同伦等价。

消解定理

定理 2.5.10 (消解定理). $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{H}$ 是一个全子正合范畴，使得 $\mathcal{P}$ 对 $\mathcal{H}$ 中满射的核封闭。并且每个 $\mathcal{H}$ 中的对象都有有限 $\mathcal{P}$-维数，那么：

$$K(\mathcal{P}) \simeq K(\mathcal{H})$$

定理 2.5.11 (Thomason-Trobaugh 消解定理). $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ 都是某个 *Abel* 范畴的链复形范畴 $\mathbf{Ch}(\mathcal{M})$ 的饱和 *Waldhausen* 子范畴，并且它们在映射锥和平移下封闭。如果 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 的导出范畴是等价的，那么 $K\mathcal{A} \simeq K\mathcal{B}$。

Dévissage

定理 2.5.12 (Dévissage). $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ 是 *Abel* 范畴之间的嵌入，使得 $\mathcal{B}$ 是正合子范畴、对子对象商对象封闭、任何 $\mathcal{A}$ 中的对象 A 都有一个有限滤过 $A = A_n \supset \cdots \supset A_0 = 0$，使得 A_i/A_{i-1} 是 $\mathcal{B}$ 的对象，那么 $K(\mathcal{A}) \simeq K(\mathcal{B})$。

证明. 应用 Quillen 定理 A，只需说明逗号范畴 Qi/B 是可缩的。 □

注记. Waldhausen 范畴的 Dévissage 仍未被解决。

Nisnevich 下降

2.5.1 $\mathbb{A}^1$-不变性：K 理论基本定理、非连合 K 理论

Todo.

第二部分

现代 K 理论

第三章 ∞-观点的代数 K 理论

记号：生像构成的 ∞-范畴记为 $An = N(Kan)$

技术性结果：Lurie Straightening Equivalence: $Cocart(\mathcal{C}) \sim Fun(\mathcal{C}, Cat_\infty)$，即到 $\mathcal{C}$ 的 coCartesian 纤维化等价于 $\mathcal{C}$ 出发到 Cat_∞ 的函子。

3.1 $\mathbb{E}_1/\mathbb{E}_\infty$-幺半群和群

定义 3.1.1 ($\mathbb{E}_1$-幺半群). $\mathcal{C}$ 是有有限积的 ∞-范畴，并且有终对象 $*$。$\mathcal{C}$ 中的 Cartesian 幺半群是指一个函子 $X : \Delta^{op} \to \mathcal{C}$ 使得：

1. $X_0 \simeq *$
2. Segal 映射 $e_i : [1] \to [n] : 0 \mapsto i, 1 \mapsto i+1, i \in \{0, \cdots, n-1\}$ 诱导的映射 $X_n \to \prod_{i=0}^{n-1} X_i$ 是等价。

记 $Mon(\mathcal{C}) \subseteq Fun(\Delta^{op}, \mathcal{C})$ 为全体 Cartesian 幺半群张成的子 ∞-范畴。如果 $\mathcal{C} = An$，它被称为 $\mathbb{E}_1$-幺半群；如果 $\mathcal{C} = Cat_\infty$，它被称为幺半 ∞-范畴。

注记. 特别地，一个 $Mon(Cat_\infty)$ 的对象可以被 coCartesian 纤维化 $p : \mathcal{C} \to \Delta^{op}$ 描述。准确地说：

一个幺半 ∞-范畴包含一个

1. 单纯集 $\mathcal{C}^\otimes$
2. coCartesian 纤维化 $p_\otimes : \mathcal{C}^\otimes \to \Delta^{op}$
3. 对于每个 n，Segal 映射的 coCartesian 提升给出的 $\mathcal{C}^\otimes_{[n]} \to \mathcal{C}^\otimes_{\{i,i+1\}}$ 给出了等价

$$\mathcal{C}^\otimes_{[n]} \to (\mathcal{C}^\otimes_{[1]})^n$$

这种描述方式是通过将诸多 X_n 视作映射 $p_\otimes$ 的纤维完成的。

定义 3.1.2 ($\mathbb{E}_1$-群). $\mathcal{C}$ 是有有限积的 ∞-范畴。一个 $\mathcal{C}$ 中的 Cartesian 幺半群称为 Cartesian 群，如果

$$(pr_1, \circ) : X_1 \times X_1 \to X_1 \times X_1 : (f, g) \mapsto (f, f \circ g)$$

是等价。这里 $\circ$ 由 $X_1 \times X_1 \xrightarrow{Segal} X_2 \xrightarrow{d_1 : 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 2} X_1$ 给出。

同样记 Cartesian 群张成的满子范畴为 $Grp(\mathcal{C}) \subseteq Mon(\mathcal{C})$。

定理 3.1.3 (May's Recognition Principle). 我们有如下等价:

$$Mon(An) \simeq (*/Cat_\infty)_{\geq 1}$$

$$Grp(An) \simeq (*/An)_{\geq 1}$$

这里 $(*/Cat_\infty)_{\geq 1}$ 由满足 $\pi_0 core\mathcal{C} \simeq *$ 的 $\mathcal{C}$ 张成，其中 $core\mathcal{C}$ 指极大子 ∞-群胚。

更具体地说，我们有等价:

$$B : Grp(An) \leftrightarrows (*/An)_{\geq 1} : \Omega$$

其中 B 是沿单纯集取极限 $\mathrm{colim}_{\Delta^{op}}$，$\Omega$ 是 An 中的拉回图表定义的:

$$\begin{tikzcd} \Omega K \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & K \end{tikzcd}$$

特别地对于 $* \to K$，ΩK 可以理解为 $\mathrm{Hom}_K(k,k)$，k 是 $*$ 的像：这和环路空间的直觉相符。

推论 3.1.4. $X \in Mon(An)$ 是 $\mathbb{E}_1$-群 $\iff$ $\pi_0 X_1$ 是群。

证明. 这是因为由 $Mon(An) \simeq (*/Cat_\infty)$，假定 $X \simeq \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(x,x)$。如果 X 是 $\mathbb{E}_1$-群，那么 $\mathcal{C}$ 进一步是 Kan 复形，于是所有 x 的到自身的态射都是等价，于是 $\pi_0 X_1$ 是群。

反过来如果 $\pi_0 X_1$ 是群，那么所有 x 的到自身的态射都是等价。然而极大子群胚 $core\mathcal{C}$ 满足 $\pi_0 core\mathcal{C}$ 是零，这就说明所有态射都是等价，从而 $\mathcal{C}$ 是 Kan 复形。 □

注记. 这本质上是在说 $\mathbb{E}_1$-群和 1-连通空间等价，转换方式是通过 Ω 和 B 完成的。

命题 3.1.5 ($\mathbb{E}_1$-群化). 嵌入 $Grp(An) \subseteq Mon(An)$ 有左伴随

$$(-)^{\infty-grp} : Mon(An) \to Grp(An)$$

它由 $X^{\infty-grp} \simeq \Omega BX$ 给出。

证明. 这件事情的本质是 $An \subseteq Cat_\infty$ 的嵌入有左伴随 $|-| : Cat_\infty \to An$（将所有态射可逆化：左 Bousfield 局部化）。这个左伴随限制到 $*/Cat_\infty$,etc.，再利用前述等价过渡就给出了结果。 □

命题 3.1.6. 每个幺半 1-范畴决定了一个幺半 ∞-范畴，我们通过描述 coCartesian 纤维化 $p_\otimes : \mathcal{C}^\otimes \to \Delta^{op}$ 来完成这个构造。

定义 $obj(\mathcal{C}^\otimes) = \coprod_{n\geq 0} obj(C)^n$，即其元素可以记为 $(n, x_1, \cdots, x_n)$。

态射定义为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\otimes}((n,x),(m,y)) = \{(\alpha,f) | \alpha : [m] \to [n] \in \Delta, f = (f_1,\cdots,f_m), f_j : x_{\alpha(j-1)+1} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha(j)} \to y_j \in Mor(\mathcal{C})\}$$

态射的复合 $(\alpha, f) : (n,x) \to (m,y); (\beta, g) : (m,y) \to (k,z)$ 定义为：第一个分量是 $\alpha \circ \beta : [k] \to [n]$，第二个分量是

$$x_{\alpha\beta(j-1)+1} \otimes x_{\alpha\beta(j)} = \bigotimes_{i=1}^{\beta(j)-\beta(j-1)} (x_{\alpha(\beta(j-1)+i-1)+1} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha(\beta(j-1)+i)})$$

那么将 $f_{\beta(j-1)+i}$ 和 g_j 复合就得到了正确的结果。

$p_\otimes$ 定义为遗忘掉第二个分量。我们来说明这是 *coCartesian* 纤维化。给定 $\alpha:[m]\to[n],(n,x)\in\mathcal{C}^\otimes$，其 *coCartesian* 提升定义为：

$$\alpha_*:(n,x)\to(m,x_{\alpha(0)+1}\otimes\cdots\otimes x_{\alpha(1)},\cdots,x_{\alpha(m-1)+1}\otimes\cdots x_{\alpha(m)})$$

定义 3.1.7. 考虑 $\mathbf{P}(R)$（有限生成投射 R-模的极大子群胚），它在直和下自动构成幺半 1-范畴。前述构造给出了一个对应的幺半 ∞-范畴：

$$Proj(R)\in Mon(Grpd_1)\subseteq Mon(An)$$

那么环 R 的 K 理论空间定义为：

$$k(R)=Proj(R)^{\infty-grp}\in Grp(An)$$

定义 3.1.8 ($\mathbb{E}_\infty$-幺半群和 $\mathbb{E}_\infty$-群). 定义 $\mathbb{F}^{op}$ 为有限集和部分定义映射构成的范畴。记 $<n>=\{1,\cdots,n\}$。存在一个函子

$$Cut:\Delta^{op}\to\mathbb{F}^{op}$$

将

$$[n]\mapsto<n>,\alpha^{op}\mapsto(i\mapsto\begin{cases}undef & i\leq\alpha(0)\\ j & \alpha(j-1)<i\leq\alpha(j))\\ undef & i>\alpha(n)\end{cases}$$

$\mathcal{C}$ 是有有限积的 ∞-范畴，$\mathcal{C}$ 中的 Cartesian 交换幺半群是指一个函子 $X:\mathbb{F}^{op}\to\mathcal{C}$，使得 $X\circ Cut:\Delta^{op}\to\mathcal{C}$ 是一个 Cartesian 幺半群。如果它还是 Cartesian 群，那么称 X 为 Cartesian 交换群。

同样地，张成的满子范畴分别记为 $CMon(\mathcal{C}),CGrp(\mathcal{C})\subseteq Fun(\mathbb{F}^{op},\mathcal{C})$

命题 3.1.9. *每个对称幺半 1-范畴决定了一个 $CMon(Cat_\infty)$ 中的对象。仍然通过给出 coCartesian 纤维化 $p_\otimes:\mathcal{C}^\otimes\to\mathbb{F}^{op}$ 完成构造。*

定义 $obj(\mathcal{C}^\otimes)$ 元素形如 $(n,x_1,\cdots,x_n),n\in\mathbb{F}^{op}$。$(n,x)\to(m,y)$ 为 $\alpha:<n>\to<m>$ 以及 $f_j:\otimes_{i\in\alpha^{-1}(j)}x_i\to y_j$。复合的定义通过 σ 完成。

事实上 $p_\otimes$ 沿着 $Cut:\Delta^{op}\to\mathbb{F}^{op}$ 就是遗忘掉交换结构后前文构造的到 Δ^{op} 的 coCartesian 纤维化。

定理 3.1.10. *我们有如下水平伴随对之间的交换图：*

$$\begin{tikzcd} CMon(An) \arrow[r, shift left, "B"] \arrow[d, "Cut^*"] & CMon(An) \arrow[l, shift left, "\Omega"] \arrow[d, "ev_1"] \\ Mon(An) \arrow[r, shift left, "B"] & */An \arrow[l, shift left, "\Omega"] \end{tikzcd}$$

并且：

1. 上方伴随对限制到 $CGrp(An)$ 使 B 成为了一个全忠实函子

2. B, Ω 均取值于 $CGrp(An)$

3. $\Omega B : CMon(An) \to CGrp(An)$ 是 $CGrp(An) \subseteq CMon(An)$ 的左伴随

4. B 的本质像是 $CGrp(An)_{\geq 1}$（其中 $CGrp(An)_{\geq i}$ 是指使得 $\pi_j X_1 = 0, \forall j < i$ 的 X 张成的 ∞-子范畴。

证明. 我们说明最底下的伴随对：

$$\mathrm{Hom}_{Mon(An)}(M, \Omega_x X) \simeq \mathrm{Hom}_{Grp(An)}(M^{\infty-grp}, \Omega_x X)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{Grp(An)}(\Omega BM, \Omega_x X_x) \simeq \mathrm{Hom}_{(*/An)_{\geq 1}}(BM, X_x) \simeq \mathrm{Hom}_{*/An}(BM, X)$$

上方伴随对是因为对 $B : Mon(An) \rightleftarrows */An : \Omega$ 使用 $Fun(\Gamma^{op}, -)$ 并限制得到了 $CMon(Mon(An)), CMon$ 之间的限制，一些事实可以说明这就是所求的伴随对。 □

推论 3.1.11. $Mon(An), CMon(An)$ 的群化是一致的，因此 $k(R)$ 也是 $\mathbb{E}_\infty$-群。这是因为对称幺半范畴给出了 $\mathbb{E}_\infty$ 幺半 ∞-范畴。

定义 3.1.12 (半加性和加性 ∞-范畴). 一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 称为半加性的，如果它有有限余积和积，有零对象，并且每个 $x, y \in \mathcal{C}$，$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_x & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_y \end{pmatrix}$ 诱导的 $x \sqcup y \to x \times y$ 是等价（这里 0 指 $x \to 0 \to y$）。此时记这个积为双积 $\oplus$。

一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 成为加性的，如果剪切映射 $\begin{pmatrix} \mathrm{id}_x & \mathrm{id}_x \\ 0 & \mathrm{id}_x \end{pmatrix} : x \oplus x \to x \oplus x$ 是等价。

定理 3.1.13. 对于半加性 ∞-范畴 $\mathcal{C}$：$CMon(\mathcal{C}) \to Mon(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ 是等价；如果 $\mathcal{C}$ 是加性的，那么 $CGrp(\mathcal{C}) \to Grp(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ 是等价。

如果 $\mathcal{C}$ 有积，那么 $CMon(\mathcal{C}), CGrp(\mathcal{C})$ 分别是半加性和加性的。记 $Cat_\infty^\times$ 为全体有有限积的 ∞-范畴和保持这些积的函子张成的子范畴，$Cat_\infty^{add} \subseteq Cat_\infty^{semi-add} \subseteq Cat_\infty^\times$ 为 $Cat_\infty^\times$ 内张成的全子范畴。那么：

$$CMon : Cat_\infty^\times \to Cat_\infty^{semi-add}; CGrp : Cat_\infty^\times \to Cat_\infty^{add}$$

分别是两个嵌入的右伴随。

注记. "Abel 群范畴中的 Abel 群对象/群对象构成的范畴还是 Abel 群范畴。"

3.2 稳定 ∞-范畴

定义 3.2.1 (谱). $\mathcal{C}$ 如果有有限积和拉回（称为有有限极限），那么就有环路函子 $\Omega : */\mathcal{C} \to */\mathcal{C}$。定义 $Sp(\mathcal{C}) = \lim(\cdots \xrightarrow{\Omega} */\mathcal{C} \xrightarrow{\Omega} */\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{C}$ 的谱对象 ∞-范畴。

定理 3.2.2. $\mathcal{C}$ 如果有有限极限，那么遗忘函子

$$Sp(CGrp(\mathcal{C})) \to Sp(\mathcal{C})$$

是等价。

证明. $Sp(CGrp(\mathcal{C})) = CGrp(Sp(\mathcal{C}))$，因此由定理 3.1.13只需说明 $Sp(\mathcal{C})$ 是加性的，但这是直接计算完成的。

当然我们也有直接的说法：$\Omega : Sp(\mathcal{C}) \to Sp(\mathcal{C})$ 是等价，它可以被分解为 $\Omega : Sp(\mathcal{C}) \to Grp(Sp(\mathcal{C})) \xrightarrow{ev_1} Sp(\mathcal{C})$，只需说明 $Sp(\mathcal{C})$ 的环路 Ω 具有 $CGrp$ 结构。 □

定义 3.2.3 (谱的同伦群). $Sp(\mathcal{C}) \simeq \lim_{\mathbb{Z}}(*/\mathcal{C})$，于是可以定义 $\Omega^{\infty-i} : Sp(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ 为射入极限图表中第 i 分量的函子。

定义 $\pi_i(X) = \pi_0(\Omega^{\infty+i}X)$。

特别地，$f : X \to Y \in Sp(\mathcal{C})$ 是等价 $\iff$ 诱导了同伦群的等价：这是因为这等价于每个 $\Omega^{\infty-i}f$ 是等价。

总结上述讨论：

定理 3.2.4. *1. $Sp(\mathcal{C})$ 有有限极限，并且极限可逐次计算。*

2. $\Omega : Sp(\mathcal{C}) \to Sp(\mathcal{C})$ 是等价

3. $Sp(\mathcal{C})$ 是加性的。

定理 3.2.5 (Recoginition Principle).

$$B^\infty : CGrp(An) \to Sp$$

是全忠实的，并且其本质像是所有连合谱：$\pi_i X = 0, \forall i < 0$。

这里 B^∞ 是由 $B^n : CGrp(An) \to CGrp(An)$ 得到的，诸 B^n 相容：因为 $\Omega BX \simeq X, \forall X \in CGrp(An)$（$\Omega$ 下移同伦群，而 B 的定义就是上移同伦群），从而给出了 B^∞。特别地：

$$\pi_i(B^\infty X) = \pi_i(X_1, *), \forall X \in CGrp(An)$$

证明. 一切内容只是 $Sp(CGrp(An)) \simeq Sp(An) = Sp$。本质像是全体连合谱的原因是 B 的本质像是 $CGrp(An)_{\geq 1}$。 □

定义 3.2.6.

$$Cat_\infty^{st}, Cat_\infty^{lex}, Cat_\infty^{rex}$$

分别是由：稳定 ∞-范畴和保持所有有限极限和有限余极限的函子；有有限极限的 ∞-范畴和保持所有有限极限的函子；有有限余极限的 ∞-范畴和保持所有有限余极限的函子。

3.3 ∞-算畴

定义 3.3.1. Γ^{op} 中的态射称为惰性的：如果它在其定义域上是双射；称为活性的：如果它处处有定义。

定义 3.3.2 (∞-算畴). 一个（多色对称）∞-算畴是指 ∞-范畴之间的函子 $p : \mathcal{O} \to \Gamma^{op}$，满足：

1. 每个 Γ^{op} 中的惰性映射都有 coCartesian 提升：即有一个 $\mathcal{O}$ 中的提升态射满足它是 coCartesian 边

2. coCartesian 提升给出的 $\mathcal{O}:\Gamma^{op}_{int}\to Cat_\infty$ 满足 Segal 条件：即 $\mathcal{O}_0\simeq *,\mathcal{O}_n\simeq\prod\mathcal{O}_1$（通过 Segal 映射 $\rho_1,\cdots,\rho_n$ 诱导）

3. 对于 $x,y\in\mathcal{O},p(x)=<m>,p(y)=<n>$，由上一条件，记 $y=(y_1,\cdots,y_n),y_i\in\mathcal{O}_1$。那么如下图表是拉回图表

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(x,y) \arrow[r, "(\rho_1,\cdots,\rho_n)"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \prod_{i=1}^n \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(x,y_i) \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(<m>,<n>) \arrow[r, "(\rho_1,\cdots,\rho_n)"'] & \prod_{i=1}^n \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(<m>,<1>)
\end{tikzcd}$$

称 $\mathcal{O}$ 中的态射是惰性的，如果它是 Γ 中的惰性态射的 p-coCartesian 提升；称 $\mathcal{O}$ 中的态射是活性的，如果它是 Γ 中的活性态射的提升。

记 Op_∞ 为 Cat_∞/Γ^{op} 中 ∞-算畴和保持惰性态射的函子张成的 ∞-子范畴。

命题 3.3.3 (∞-算畴是对称幺半 ∞-范畴的判别). *由于 ∞-算畴满足 Segal 条件，coCartesian unstraightening 给出了一个函子*

$$(-)^{\otimes}:CMon(Cat^{\infty})\to Op_\infty$$

此时一个 ∞-算畴 $p:\mathcal{O}\to\Gamma^{op}$ 是一个对称幺半 ∞-范畴（即是上述函子的本质像），当且仅当如下条件成立：

1. $\forall<n>\in\Gamma^{op},(a_1,\cdots,a_n)\in\mathcal{O}_n$，存在 $\mathcal{O}_1$ 中的元素 $a\simeq a_1\otimes\cdots\otimes a_n$；即存在 $g:(a_1,\cdots,a_n)\to g$ 是 $f_n:<n>\to<1>$（这里 f_n 是唯一的活性映射）的提升，满足：

$$g:\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_1}(a,-)\implies\mathrm{Hom}^{act}_{\mathcal{O}}((a_1,\cdots,a_n),-)$$

是等价.

其中 $\mathrm{Hom}^{act}_{\mathcal{O}}((a_1,\cdots,a_n),b)$ 是指 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}((a_1,\cdots,a_n),b)$ 沿 $f_n:*\to\mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(<n>,<1>)$ 的拉回。

2. 前文的张量积 g 是结合的：即 $a_1\otimes a_2\otimes a_3\simeq(a_1\otimes a_2)\otimes a_3\simeq a_1\otimes(a_2\otimes a_3)$

证明. 对比定义，Segal 条件自动满足，惰性映射自动有 coCartesian 提升，只需说明活性映射有 coCartesian 映射，但这就是条件。 □

定义 3.3.4 (松幺半函子和强幺半函子). 对于对称幺半 ∞-范畴 $p:\mathcal{C}^{\otimes}\to\Gamma^{op},q:\mathcal{D}^{\otimes}\to\Gamma^{op}$：其间的 ∞-算畴态射称为松幺半函子；其间将 p-coCartesian 边映至 q-coCartesian 边的 ∞-算畴态射称为强幺半函子。

如果一个 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 有有限积，那么它的积理应给出一个对称幺半结构。这被称为 Cartesian 幺半结构；同理对于余积我们也有 coCartesian 幺半结构。构造参见 [Lur17, 2.4]。

定义 3.3.5 (∞-算畴上的代数). 对于两个 ∞-算畴 $p:\mathcal{O}\to\Gamma^{op},p':\mathcal{O}'\to\Gamma^{op}$。定义 $Fun_{\Gamma^{op}}(\mathcal{O},\mathcal{O}')$ 为 $Fun(\mathcal{O},\mathcal{O}')$ 沿 $p:*\to Fun(\mathcal{O},\Gamma^{op})$ 的拉回。取 $Fun^{Op_\infty}(\mathcal{O},\mathcal{O}')$ 为 ∞-算畴态射在 $Fun_{\Gamma^{op}}(\mathcal{O},\mathcal{O}')$ 张成的全子 ∞-范畴。

对于 ∞-算畴 $\mathcal{O}$ 以及 $\mathcal{C}$ 上的一个对称幺半结构 $\mathcal{C}^{\otimes} \to \Gamma^{op}$，记：

$$Alg_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}) \coloneqq Fun^{Op_\infty}(\mathcal{O}, \mathcal{C}^{\otimes})$$

为 $\mathcal{C}$ 中 $\mathcal{O}$-代数的 ∞-范畴。

更一般地，定义 $\mathcal{O}$-幺半范畴的 ∞-范畴为由满足 Segal 条件的 $F:\mathcal{O}\to\mathcal{C}$（即张成的全子范畴 $\mathcal{O}Mon(\mathcal{C}) \subseteq Fun(\mathcal{O},\mathcal{C})$。现在对于另一个 ∞-算畴 $\mathcal{O}'$，以及 ∞-算畴态射 $\alpha : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$。如果 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{O}Mon(Cat_\infty)$ 的元素，考虑它的 coCartesian unstraightening $\mathcal{C}^{\otimes} \in Op_\infty/\mathcal{O}$。定义 $Alg_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 为拉回：

$$\begin{tikzcd}
Alg_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}(\mathcal{C}^{\otimes}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Fun^{Op_\infty}(\mathcal{O}', \mathcal{C}^{\otimes}) \arrow[d] \\
* \arrow[r, "\alpha"'] & Fun^{Op_\infty}(\mathcal{O}', \mathcal{O})
\end{tikzcd}$$

例子. 在第二个定义中取 $\mathcal{O}$ 为 $\mathrm{id}:\Gamma^{op}\to\Gamma^{op}$，那么 $Alg_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 自动变为 $Alg_{\mathcal{O}'}(\mathcal{C}^{\otimes})$。

定理 3.3.6. $Alg_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}^{\times}) \simeq \mathcal{O}Mon(\mathcal{C})$，特别地 $Alg_{\mathbb{C}\mathrm{omm}}(\mathcal{C}^{\times}) \simeq CMon(\mathcal{C})$。基于此，我们将这个 ∞-算畴记为 $\mathbb{C}omm$ 或 $\mathbb{E}_\infty$。

定理 3.3.7 (Day Covolution). $\mathcal{C}^{\otimes}$ 是对称幺半 ∞-范畴，满足 $\mathcal{C}$ 是弱可缩的（即 $\mathcal{D} \to Fun(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 是全忠实的 $\forall\mathcal{D}$，特别地：有始对象或终对象的 ∞-范畴自动是弱可缩的）。对于 ∞-算畴 $\mathcal{O}$，我们有构造 $Day(\mathcal{C}^{\otimes},\mathcal{O})$ 满足：

1. $Day(\mathcal{C}^{\otimes},\mathcal{O}) \to \Gamma^{op}$ 给出了一个 ∞-算畴，其中基底范畴是 $Fun(\mathcal{C},\mathcal{O}_1)$。
2. *Day Convolution* 构造是 ∞-算畴函子性的：即对于 ∞-算畴态射 $q:\mathcal{C}^{\otimes}\to\mathcal{C}'^{\otimes}, p:\mathcal{O}\to\mathcal{O}'$，诱导的 *Day Convolution* 之间的态射也是 ∞-算畴态射
3. 如果 $\mathcal{O}$ 来自某个余完备对称幺半范畴 $\mathcal{D}$，并且 $-\otimes_{\mathcal{D}}-$（在两个变量）都和余极限交换，那么 $Day(\mathcal{C}^{\otimes},\mathcal{D}^{\otimes})$ 给出了 $Fun(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 的对称幺半结构。此时幺半结构有着具体的描述：

$$(F_1 \otimes_{Day} F_2)(c) \simeq \mathrm{colim}_{d\otimes_{\mathcal{C}} d' \to c}(F_1(d) \otimes_{\mathcal{D}} F_2(d'))$$

（最后一条是 *convolution* 名称的直观）

定义 3.3.8. $\mathcal{O}$ 是 ∞-算畴，$F:\mathcal{I}\to\mathcal{O}_1$ 是一个图表，那么 F 的极限/余极限称为算畴的 (operadic)，如果 $\forall x_1,\cdots,x_n,y\in\mathcal{O}_1$：

$$\mathrm{Hom}^{act}_{\mathcal{O}}((\mathrm{colim}\, F, x_2, \cdots, x_n), y) \simeq \lim \mathrm{Hom}^{act}_{\mathcal{O}}((F(-), x_2, \cdots, x_n), y)$$

或

$$\mathrm{Hom}^{act}_{\mathcal{O}}((x_1, x_2, \cdots, x_n), \lim F) \simeq \lim \mathrm{Hom}^{act}_{\mathcal{O}}((x_1, x_2, \cdots, x_n), F(-))$$

一个 ∞-算畴称为带点的/半加性的/加性的/稳定的：如果其基底范畴 $\mathcal{O}_1$ 是带点的/半加性的/加性的/稳定的，并且这些性质所需的极限/余极限是算畴的。具体来说：

1. $\mathcal{O}$ 称为带点 ∞-算畴，如果 $\mathcal{O}_1$ 有零对象，并且始对象和终对象都是算子的。记 $Op^*_\infty \subseteq Op_\infty$ 为由有算畴的终对象的 ∞-算畴和保持终对象的态射张成的子范畴；记 $Op^{pt}_\infty \subseteq Op^*_\infty$ 为带点 ∞-算畴张成的全子范畴。

2. $\mathcal{O}$ 称为半加性/加性 ∞-算畴，如果 $\mathcal{O}_1$ 是半加性/加性的，并且有限积和有限余积都是算子的。记 $Op_\infty^\times \subseteq Op_\infty$ 为由有算畴的有限积的 ∞-算畴和保持这些积的态射张成的子范畴；记 $Op_\infty^{add} \subseteq Op_\infty^{semi-add} \subseteq Op_\infty^\times$ 为半加性/加性 ∞-算畴张成的全子范畴。

3. $\mathcal{O}$ 称为稳定 ∞-算畴，如果 $\mathcal{O}_1$ 是稳定的，并且其中所有有限极限和有限余极限都是算子的。记 $Op_\infty^{lex} \subseteq Op_\infty$ 为由有算畴有限极限和保持所有有限极限的态射张成的子范畴；记 $Op_\infty^{st} \subseteq Op_\infty^{lex}$ 为稳定 ∞-算畴张成的全子范畴。

定义 3.3.9. 对于 ∞-算畴 $\mathcal{O}$，定义如下 ∞-算畴

$$\mathcal{O}_*^{Op_\infty}, CMon^{Op_\infty}(\mathcal{O}), CGrp^{Op_\infty}(\mathcal{O}), Sp^{Op_\infty}(\mathcal{O})$$

考虑 1-范畴 [1] 上取最小值给出的幺半结构：它给出了 $[1]^{\min} \to \Gamma^{op}$。现在对于 $\mathcal{O}_\infty^*$，定义

$$\mathcal{O}_*^{Op_\infty} \subseteq Day([1]^{\min}, \mathcal{O})$$

为 $Fun([1], \mathcal{O}_1)$ 中所有使得 $F(0) = *$ 的 F 的全子范畴张成的子 ∞-算畴（这里全子范畴 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{O}_1$ 张成子 ∞-算畴是指全体 $d \simeq (d_1, \cdots, d_n), d_i \in \mathcal{D}$ 张成的全子范畴：它的确是 ∞-算畴）

类似地，对于 $\mathcal{O} \in Op_\infty^\times$，定义

$$CGrp^{Op_\infty}(\mathcal{O}) \subseteq CMon^{Op_\infty}(\mathcal{O}) \subseteq Day((\Gamma^{op})^\times, \mathcal{O})$$

为全子范畴 $CGrp(\mathcal{O}_1) \subseteq CMon(\mathcal{O}_1) \subseteq Fun(\Gamma^{op}, \mathcal{O}_1)$ 张成的子 ∞-算畴。这里 $(\Gamma^{op})^\times$ 指 Cartesian 幺半结构。

最后，对于 $\mathcal{O} \in Op_\infty^{lex}$，定义

$$Sp^{Op_\infty}(\mathcal{O}) \subseteq Day((\mathbb{F}^{op})^\wedge, \mathcal{O})$$

为 $Sp(\mathcal{O}_1) \subseteq Fun(\mathbb{F}^{op}, \mathcal{O}_1)$ 张成的子 ∞-算畴，其中 $\mathbb{F}^{op} \subseteq */An$ 指包含 $\mathbb{S}^0$ 并在有限余极限下封闭的最小的子 ∞-范畴，$\mathbb{F}^{op}$ 上的（拓扑意义下）Smash Product 给出了一个幺半结构 $(\mathbb{F}^{op})^\wedge$，$Sp(\mathcal{O}_1)$ 指约化切除函子张成的全子范畴。

现在 ∞-算畴态射

$$\mathbb{C}omm \to [1]^{min} \to (\Gamma^{op})^\times \to (\mathbb{F}^{op})^\wedge$$

通过 Day Convolution 的函子性诱导了

$$\mathcal{O} \leftarrow \mathcal{O}_*^{Op_\infty} \leftarrow CMon^{Op_\infty}(\mathcal{O}) \leftarrow CGrp^{Op_\infty}(\mathcal{O}) \leftarrow Sp^{Op_\infty}(\mathcal{O})$$

定理 3.3.10. *上述四个构造是四个嵌入 $Op_\infty^{pt} \subseteq Op_\infty^*$,$Op_\infty^{add} \subseteq Op_\infty^{semi-add} \subseteq Op_\infty^\times$,$Op_\infty^{st} \subseteq Op_\infty^{lex}$ 的右伴随。*

下面我们希望上述构造能够将 $\mathcal{O} \simeq \mathcal{C}^\otimes$ 的对称幺半性质继承：这是由如下判别给出的。

命题 3.3.11 (幺半性质的继承)**.** *如果 $\mathcal{O} \simeq \mathcal{C}^\otimes$ 使得 $\mathcal{C}$ 余完备并且所有余极限都是算畴的（即和 $- \otimes_{\mathcal{C}} -$ 交换），并且如下嵌入有左伴随：*

$$*/\mathcal{C} \subseteq Ar(\mathcal{C}), CMon(\mathcal{C}) \subseteq Fun(\Gamma^{op}, \mathcal{C})$$

$$CGrp(\mathcal{C}) \subseteq Fun(\Gamma^{op}, \mathcal{C}), Sp(\mathcal{C}) \subseteq Fun(\mathbb{F}^{op}, \mathcal{C})$$

($Ar(\mathcal{C}) = Fun(\Delta^1, \mathcal{C})$ 那么前述四个构造都是对称幺半 ∞-范畴，同时余完备且所有余极限都是算畴的。并且 ∞-算畴态射

$$\mathcal{O} \leftarrow \mathcal{O}_*^{Op_\infty} \leftarrow CMon^{Op_\infty}(\mathcal{O}) \leftarrow CGrp^{Op_\infty}(\mathcal{O}) \leftarrow Sp^{Op_\infty}(\mathcal{O})$$

各自有强幺半的左伴随

$$(-)_+ : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_*^{Op_\infty}, Free^{CMon} : \mathcal{O} \to CMon^{Op_\infty}(\mathcal{O})$$

$$Free^{CGrp} : \mathcal{O} \to CGrp^{Op_\infty}(\mathcal{O}), \Sigma^\infty : \mathcal{O} \to Sp^{Op_\infty}(\mathcal{O})$$

当然其他箭头还有各自的左伴随，例如 B^∞ 和 $(-)^{\infty-grp}$。

于是我们终于完成了重要命题的证明：

定义 3.3.12. $Sp = Sp(An)$ 上有典范的对称幺半结构：$Sp^\otimes = Sp^{Op_\infty}(An^\times)$，并且它和所有余极限交换。

3.4 $\mathbb{E}_\infty$-环谱

定义 3.4.1. 对任何对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$，定义

$$CAlg(\mathcal{C}^\otimes) = Alg_{\mathbb{C}omm}(\mathcal{C}^\otimes)$$

特别地，对于携带前述定义幺半结构的 Sp，我们定义

$$CAlg = Alg_{\mathbb{C}omm}(Sp^\otimes)$$

为 $\mathbb{E}_\infty$-环谱的 ∞-范畴。特别地，$\mathbb{E}_\infty$-环谱有一个基底的谱：它由

$$CAlg \simeq Fun^{Op_\infty}(\mathbb{C}omm, Sp^\otimes) \to Sp$$

这里的箭头是由限制到 $<1> \in \Gamma^{op}$ 的原像上给出的 $<1> \to Sp$ 的像。

例子. $CRing \simeq CAlg(Ab^\times)$

例子. 现在 $CAlg(An^\times) \simeq CMon(An)$，考虑 $\mathbb{S}[-] := \Sigma^\infty(-)_+ : An^\times \to Sp^\otimes$：由于命题 *3.3.11*，$\Sigma^\infty, (-)_+$ 都是强幺半的，那么我们有函子

$$\mathbb{S}[-] : CMon(An) \to CAlg$$

定理 3.4.2. 考虑 K 理论空间 $k(R) \in CGrp(An)$，连合谱 $B^\infty k(R)$ 具有 $\mathbb{E}_\infty$-环谱结构。

证明. $\mathbf{P}(R)$ 上的 $\oplus, \otimes$ 使得 $\mathbf{P}(R) \subseteq CMon(Grpd)$ 进一步变为 $CAlg(CMon^{Op_\infty}(Grpd_1^\times)) \subseteq CAlg(CMon^{Op_\infty}(An^\times))$ 中的对象。但是命题 3.3.11保证了 $(-)^{\infty-grp}, B^\infty$ 都是强幺半的，从而 $B^\infty k(R)$ 被送入 $CAlg(Sp) = CAlg$ 中，因此是 $\mathbb{E}_\infty$-环谱。 □

稳定同伦论的一个重要纲领就是谱范畴表现得如同 Ab，$\mathbb{E}_\infty$-环谱范畴则表现得如同 $CRing$。我们简要介绍几个与之相关的性质。

定义 3.4.3 (Eilenberg-Maclane 函子)**.** 我们有带点空间和导出范畴之间的伴随

$$\tilde{C}_\bullet : */An \rightleftarrows \mathcal{D}_{\geq 0}(\mathbb{Z}) : K$$

其中 $\tilde{C}_\bullet$ 是取约化奇异链复形；K 是取空间 $\prod K(H_i(C_\bullet), i)$。

这个伴随对在谱范畴中变成

$$C_\bullet : Sp \rightleftarrows \mathcal{D}(\mathbb{Z}) : H$$

其中 $C_\bullet(X) \simeq \operatorname{colim} \tilde{C}_\bullet(\Omega^{\infty - i}X)[-i]$，$HC = (K(C), K(C[1]), K(C[2]), \cdots)$。

现在引入幺半结构，前述函子进一步提升成 ∞-算畴之间的函子

$$H : \mathcal{D}(\mathbb{Z})^{\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}}} \to Sp^{\otimes}$$

即 H 是松幺半函子。更一般地：$C_\bullet(-, R) = C_\bullet(-) \otimes^L_{\mathbb{Z}} R : Sp \to \mathcal{D}(R)$ 有左伴随 $H : \mathcal{D}(R) \to Sp$ 并且是松幺半函子。

定义 3.4.4 (模谱)**.**

1. 定义 ∞-算畴 $\mathbb{E}_1 = \mathbb{A}ssoc \to \Gamma^{op}$ 如下：$\mathbb{A}ssoc$ 的对象为有限集，态射 $I \to J$ 是一个 Γ^{op} 中的态射配合上为每个原像 $\alpha^{-1}(j)$ 指定的顺序。态射的复合由 Γ^{op} 的复合以及字典序给出。现在显然的投影函子 $\mathbb{A}ssoc \to \Gamma^{op}$ 给出了一个 ∞-算畴，$\mathbb{A}ssoc_1 = \{*\}$。

2. 定义 ∞-算畴 $\mathbb{L}Mod \to \Gamma^{op}$ 如下：$\mathbb{L}Mod$ 的对象为 $(I, S), I \in \Gamma^{op}, S \subseteq I$。$(I, S) \to (J, T)$ 包含一个 $\mathbb{A}ssoc$ 中的态射 $\alpha : I \to J$ 使得 $\alpha(S) = T$ 并且 $\forall t \in T, \alpha^{-1}(t) \cap S$ 包含的恰好是 $\alpha^{-1}(t)$ 的极大元。态射的复合由 $\mathbb{A}ssoc$ 给出。现在显然的投影函子 $\mathbb{L}Mod \to \Gamma^{op}$ 给出了一个 ∞-算畴，$\mathbb{L}Mod_1 = \{a = (<1>, \varnothing), m = (<1>, <1>)\}$，它们应当分别被理解为来自 A 和 M。我们关于 $\alpha^{-1}(t)$ 的要求恰好使得来自 M 的因子总是位于最右侧，于是这给出的是左 A 模。

现在 $* \in \mathbb{A}ssoc_1$ 射至 $a \in \mathbb{L}Mod_1$ 给出了唯一的 ∞-算畴态射 $\mathbb{A}ssoc \to \mathbb{L}Mod$，从而诱导了 $a^* : Alg_{\mathbb{L}Mod}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to Alg_{\mathbb{A}ssoc}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 现在对于 $A \in Alg_{\mathbb{A}ssoc}(\mathcal{C}^{\otimes})$，定义

$$\begin{tikzcd}
LMod_A(\mathcal{C}^{\otimes}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Alg_{\mathbb{L}Mod}(\mathcal{C}^{\otimes}) \arrow[d, "a^*"] \\
* \arrow[r, "A"'] & Alg_{\mathbb{A}ssoc}(\mathcal{C}^{\otimes})
\end{tikzcd}$$

现在回到 Sp，每个 $\mathbb{E}_\infty$-环谱 R 都给出了一个 $Alg_{\mathbb{A}ssoc}(Sp^{\otimes})$ 的元素（通过 $CAlg \to Alg_{\mathbb{A}ssoc}$）。那么定义 R-模谱构成的 ∞-范畴为

$$Mod_R \coloneqq LMod_R(Sp^{\otimes})$$

定理 3.4.5. *R 是离散环，*

$$\mathcal{D}(R) \simeq LMod_{R[0]}(\mathcal{D}(R)^{\otimes^L_R}) \xrightarrow{H} LMod_{HR}(Sp^{\otimes}) \simeq Mod_{HR}$$

是等价。

下面我们引入环谱的张量积：

定理 3.4.6. $LMod_A(\mathcal{C}^{\otimes})$ 上有标准的张量积结构：它可以通过

$$M \otimes_A N \simeq \operatorname{colim}_{\Delta^{op}} Bar(M, A, N)$$

计算得到。其中 $Bar(M, A, N) : \Delta^{op} \to \mathcal{C}$ 将 $[n]$ 送至 $M \otimes A^n \otimes N$。并且 A 是张量积单位元。

$\hom_{Mod_R} : Mod_R^{op} \times Mod_R \to Sp$ 自然提升到 $Mod_R^{op} \times Mod_R \to Mod_R$，并且它满足 $\hom -\otimes_R$ 伴随。

对于 $CAlg$ 中的态射 $R \to S$，$S \otimes_R - : Mod_R \to Mod_S$ 是对称幺半函子，并满足结合律。同时它还有遗忘函子右伴随 $Mod_S \to Mod_R$ 是的它作用在基底谱上是 id。这个遗忘函子也有右伴随：它是 $\hom_R(S, -) : Mod_R \to Mod_S$。

下面我们引入环谱的局部化：

定义 3.4.7. $R \in CAlg$ 是 $\mathbb{E}_\infty$-环谱，$M \in Mod_R$，$S \subseteq \pi_0(R)$。称 M 是 S-局部的，如果 $\forall s \in S$：

$$M \simeq \mathbb{S} \otimes M \xrightarrow{s \otimes \mathrm{id}_M} R \otimes M \to M$$

是等价。

定义 3.4.8. 对于 $s \in \pi_0(R)$，定义局部化

$$M[s^{-1}] \coloneqq \operatorname{colim}(M \xrightarrow{\cdot s} M \to \cdots)$$

对于任何 $S \subseteq \pi_0(R)$：如果 $T \subseteq S$ 是有限集，$T = \{s_1, \cdots, s_n\}$，定义 $M[T^{-1}] = M[(s_1 \cdots s_n)^{-1}]$，那么定义局部化

$$M[S^{-1}] \coloneqq \operatorname{colim}_{finite\ T \subseteq S} M[T^{-1}]$$

命题 3.4.9. $-[S^{-1}] : Mod_R \to Mod_R$ 是到 S-局部模的 *Bousfield* 局部化。

证明. 像是 S-局部的只是因为观察其在同伦群上的作用即可，而同伦群能够检测等价。$-[S^{-1}]$ 仍然是 Mod_R 中对象则相对不平凡。 □

我们还进一步希望环的局部化仍然是环，即 $\mathbb{E}_\infty$-结构在前述余极限构造下被保持。这的确正确：

定理 3.4.10. $R[S^{-1}]$ 有着典范的 $\mathbb{E}_\infty$-环谱结构，$R \to R[S^{-1}]$ 是 $\mathbb{E}_\infty$-环谱间的映射。并且：

$$R[S^{-1}] \otimes_R - : Mod_R \to Mod_{R[S^{-1}]}$$

诱导了到 S-局部 Mod_R 对象的 *Bousfield* 局部化。并且我们还有局部化的泛性质：$\forall T \in CAlg$，

$$\operatorname{Hom}_{CAlg}(R[S^{-1}], T) \subseteq \operatorname{Hom}_{CAlg}(R, T)$$

是全体将 $S \subseteq \pi_0(R)$ 射入 $\pi_0(T)$ 单位的那些态射。

3.5 群化定理

定理 3.5.1 (McDuff-Segal 群化定理). 对任何 $E \in Sp, M \in CMon(An)$，定义 $E[-] = \mathbb{S}[-] \otimes_{\mathbb{S}} E$。那么有典范等价

$$(E[M])[\pi_0(M)^{-1}] \to E[M^{\infty-grp}]$$

（作为 $\mathbb{S}[M]$-模谱）特别地：

$$H_*(M^{\infty-grp}, \mathbb{Z}) \simeq H_*(M, \mathbb{Z})[\pi_0(M)^{-1}]$$

证明. 首先回忆命题 3.3.11给出的伴随 $\mathbb{S}[-] : An^{\times} \rightleftarrows Sp^{\otimes} : \Omega^{\infty}$。由于两侧都（至少是松）幺半函子，我们有 $CAlg(An^{\times}) \rightleftarrows CAlg(Sp^{\otimes})$ 之间的伴随。但是由于 $CAlg(An^{\times})$ 就是 $CMon(An)$，这给出了 $\mathbb{E}_{\infty}$-环谱和 $\mathbb{E}_{\infty}$-幺半群之间的伴随。

现在

$$\mathrm{Hom}_{CAlg}(\mathbb{S}[M^{\infty-grp}], R) \simeq \mathrm{Hom}_{CMon(An)}(M^{\infty-grp}, \Omega^{\infty} R)$$

$$\subseteq \mathrm{Hom}_{CMon(An)}(M, \Omega^{\infty} R) \simeq Hom_{CAlg}(\mathbb{S}[M], R)$$

其中含入是那些将 $\pi_0(M)$ 映为 $\pi_0(\Omega^{\infty} R)$ 单位的映射：这是因为等同到 $(*/Cat_{\infty})_{\geq 1}$ 来看，$\infty-grp$ 的 π_0 平凡。

但是局部化泛性质就直接说明了

$$(\mathbb{S}[M])[\pi_0(M)^{-1}] \simeq \mathbb{S}[M^{\infty-grp}]$$

□

推论 3.5.2. $H_*(k(R)_0, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{colim}\, H_*^{grp}(GL_n(R), \mathbb{Z})$

证明. 由群化定理：

$$H_*(k(R), \mathbb{Z}) \simeq H_*(Proj(R), \mathbb{Z})[\pi_0 Proj(R)^{-1}] \simeq \mathrm{colim}(H_*(Proj(R), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot [R]} \cdots)$$

但是 $Proj(R) \simeq \coprod_{[P]} BGL(P)$。通过分离 0 所在的连通分支，我们发现在第一项中它是 $BGL_1(R)$，第二项（通过 $\cdot [R]$ 后变为 $BGL_2(R)$），因此右侧就是 $\mathrm{colim}\, H_*(BGL_n(R), \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{colim}\, H_*^{grp}(GL_n(R), \mathbb{Z})$。

□

3.6 循环不变判别与 Quillen + 构造

对于 $M \in CMon(An) = CAlg(An^{\times})$，一个自然的事实是我们也可以定义 M 上的模对象：即 $LMod_M(An^{\times})$。类似地，做“局部化”

$$T(M, s) \simeq \mathrm{colim}(M \xrightarrow{\cdot s} \cdots)$$

也给出了一个模。现在我们始终假定 $s \in \pi_0(M)$ 满足 $(\pi_0(M))[s^{-1}] \simeq \pi_0(M)^{grp}$。然而我们发现一个问题：$T(M, s)$ 并不一定是 s-局部的。

对于环谱的情况我们直接使用同伦群就得到了结果。在这里尽管 An 也能够使用同伦群探测等价，但是这里我们出现的是基点问题！如果我们将 $T(M, s)$ 上的乘 s 映射写为一个 $2 \times \infty$

的图表的余极限，我们发现问题出现在 $\mathbb{E}_\infty$-幺半群给出的交换同伦：即两种乘 s 之间的同伦：它当然可能不是 $\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}_{Fun(M,M)}(s^2, s^2)$。为了严格地探测这个问题，我们定义如下映射。

对于 $M \in CMon(An)$ 以及 $m \in M$，$\mathbb{E}_\infty$-群胚给出了 $\Gamma^{op} \to An$ 的函子，并将 $< n >$ 送到 M^n。那么函子性给出了图表

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{S}_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(< n >, < n >) \arrow[r] \arrow[d, "\int_n : < n > \mapsto < 1 > : i \mapsto 1"] & \mathrm{Hom}_{An}(M^n, M^n) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_*"] & \mathrm{Hom}_{An}(\{(m,\cdots,m)\}, M^n) \simeq M^n \arrow[d, "\mu_*"] \\
* \arrow[r, "f_n : i \mapsto 1"'] & \mathrm{Hom}_{\Gamma^{op}}(< n >, < 1 >) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{An}(M^n, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{An}(\{(m,\cdots,m)\}, M) \simeq M
\end{tikzcd}$$

然而第一行箭头 $\mathfrak{S}_n \to M^n$ 将离散空间 $\mathfrak{S}_n$ 的每个点都射为 $\{(m,\cdots,m)\}$。因此上述图表延展为

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{S}_n \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \{(m,\cdots,m)\} \arrow[d] \\
\mathfrak{S}_n \arrow[r] \arrow[d] & M^n \arrow[d] \\
* \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

于是这诱导了

$$\mathfrak{S}_n \to \{(m,\cdots,m)\} \times_{M^n} M^n \times_M \{*\}$$

其中 $*$ 是上述图表中 $*$ 在第二行中的像，于是自然是 $\{m^n\}$。现在先计算左边的拉回就得到了：

$$\mathfrak{S}_n \to \{m^m\} \times_M \{m^m\} \simeq \Omega_{m^n} M$$

于是这就给出了 $\mathfrak{S}_n \to \pi_0 \Omega_{m^n} M = \pi_1(M, m^n)$。

定理 3.6.1 (循环不变判别). *$M \in CMon(An)$，$s \in M$ 使得 $\pi_0(M)[s^{-1}] \simeq \pi_0(M)^{grp}$。那么如下等价：*

1. *$s : T(M,s) \to T(M,s)$ 是等价*
2. *$T(M,s)$ 的每个连通分支的基本群是 Abel 的*
3. *$T(M,s)$ 的每个连通分支的基本群是超 Abel 的：即不存在非平凡的完美子群*
4. *$\forall m \in M, \mathfrak{S}_3 \to \pi_1(M, m^3) \to \pi_1(T(M,s), m^3)$ 将 (123) 映为平凡元*
5. *$\exists n \geq 2$ 使得 $\forall m \in M, \mathfrak{S}_n \to \pi_1(M, m^n) \to \pi_1(T(M,s), m^n)$ 将 $(12\cdots n) \in \mathfrak{S}_n$ 映为平凡元*

在上述条件成立时：$T(M,s)$ 有自然的 $\mathbb{E}_\infty$-幺半群结构，并且 $M^{\infty-grp} \simeq T(M,s)$。

证明. $a \implies$ 结论. 我们不证明 $T(M,s)$ 的 $\mathbb{E}_\infty$-幺半群结构，它和命题 3.4.9内容相近。$T(M,s)$ 是一个 $\mathbb{E}_\infty$-群，因为它的 π_0 是群，而和推论 3.1.4平行的结果立刻说明它是 $\mathbb{E}_\infty$-群。因此 $M \to T(M,s)$ 穿过 $M^{\infty-grp} \to T(M,s)$。现在由 Yoneda 引理，只需证明 $\forall X \in CGrp(An)$，

$$\mathrm{Hom}_{CMon(An)}(T(M,s), X) \simeq \mathrm{Hom}_{CMon(An)}(M^{\infty-grp}, X)$$

进一步我们可以替换成 $M/CMon(An)$。此时 $\mathrm{Hom}_{CMon(An)}(M^{\infty-grp}, X) \simeq \mathrm{Hom}_{CMon(An)}(M, X)$，而 3.4.9 又说明 $T(M, s)$ 是 M 的到 $\{s\}$-局部对象的 Bousfield 局部化。X 由于是 $\mathbb{E}_\infty$-群当然是 s-局部的。因此：$\mathrm{Hom}\,(T(M, s), X) = \mathrm{Hom}(M, X)$。这就验证了 Yoneda 引理从而说明了结果。

结论 $\implies$ b. Eckmann-Hilton 论证。不同连通分支是等价的，因为这是 $\mathbb{E}_\infty$-群。

$b \implies c, b \implies d, d \implies e$ 平凡。

$c \implies e$. 取 $n = 6$，那么 $\mathfrak{A}_6 \subseteq \mathfrak{S}_6$ 是完美子群。因此 $(12\cdots 6) \in \mathfrak{A}_6$ 的像平凡。

$e \implies a$. 由共尾性：$T(M, s) \simeq \mathrm{colim}(M \xrightarrow{s^n} M \to \cdots)$，那么这里的乘 s 映射变为

$$\mathrm{colim}\left(\begin{tikzcd} M \arrow[r, "s^n"] \arrow[d, "s"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "s"] \arrow[dl, Rightarrow, "\tau^n"'] & \cdots \\ M \arrow[r, "s^n"'] & M \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}\right)$$

其中 $\tau^n \in \mathrm{Hom}_{Fun(M,M)}(s^{n+1}, s^{n+1})$。那么如果它在 $T(M, s)$ 中的像平凡，乘 s 映射就成为等价。但是这个条件就是 $\mathfrak{S}_n \to \pi_1(M, m^n)$ 将 $(12\cdots n)$ 映为单位元。 □

定理 3.6.2 (Kervaire-Quillen +-构造). *$An^{hypo} \subseteq An$ 是全体超 Abel 空间构成的全子范畴：其中超 Abel 空间 X 是指使得 $\pi_1(X, e), \forall e \in X$ 是超 Abel 群的空间。那么：*

嵌入 $An^{hypo} \subseteq An$ 有左伴随 $(-)^+ : An \to An^{hypo}$。$X \to X^+$ 诱导了等价 $\mathbb{S}[X] \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}[X^+]$，从而诱导了同调上的同构。更进一步地，$(-)^+$ 还保持有限积。

证明. 定理 2.1.4. □

命题 3.6.3. *$M \in CMon(An)$ 中有 $s \in \pi_0(M)$ 使得 $\pi_0(M)[s^{-1}] = \pi_0(M)^{grp}$，那么：*

$$T(M, s)^+ \simeq T(M^+, s) \simeq M^{\infty-grp}$$

证明. $T(M^+, s)$ 的每个连通分支的基本群都是 Abel 的，因为由定理 3.6.1的第五个条件，注意到 $\mathfrak{A}_6 \subseteq \mathfrak{S}_6$ 是超 Abel 子群，它到 $T(M, s)$ 的群同态穿过 $\pi_1(M^+)$。但是 M^+ 已经是超 Abel 空间，于是将 $\mathfrak{A}_6$ 映为单位元。因此 $(12\cdots 6)$ 在 $\pi_1(T(M, s))$ 中的像总是平凡。

我们现在来验证 $T(M^+, s)$ 满足 $(-)^+$ 的泛性质：即 $\forall Z \in An^{hypo}$

$$\mathrm{Hom}_{An}(T(M^+, s), Z) \simeq \lim(\cdots \to \mathrm{Hom}_{An}(M^+, Z) \xrightarrow{s^*} \mathrm{Hom}_{An}(M^+, Z))$$

$$\simeq \lim(\cdots \to \mathrm{Hom}_{An}(M, Z) \xrightarrow{s^*} \mathrm{Hom}_{An}(M, Z)) \simeq \mathrm{Hom}_{An}(T(M, s), Z) \simeq \mathrm{Hom}_{An}(T(M, s)^+, Z)$$

于是这就说明了 $T(M^+, s) \simeq T(M, s)^+$。

现在由定理 3.6.1：$T(M^+, s) \simeq (M^+)^{\infty-grp}$。由于 $\mathbb{S}[M] \simeq \mathbb{S}[M^+]$ 以及群化定理定理 3.5.1，$E[M^{\infty-grp}] \simeq E[(M^+)^{\infty-grp}], \forall E \in Sp$，从而诱导了同调群上的同构。但是2.2.2的同调 Whitehead 定理就说明了 $M^{\infty-grp} \simeq (M^+)^{\infty-grp}$，这说明了结果。 □

于是现在我们终于了群化和 + 构造得到的 K 理论空间是一样的：

推论 3.6.4. *$k(R) = K_0(R) \times BGL(R)^+$*

证明. $k(R) \simeq Proj(R)^{\infty-grp} \simeq T(Proj(R), [R])^+ \simeq \mathrm{colim}(Proj(R) \xrightarrow{\cdot[R]} Proj(R) \to \cdots)$ 但是观察 0 在右侧的连通分支就说明 $k_0(R) \simeq (\mathrm{colim}\, BGL_n(R))^+ \simeq BGL(R)^+$，于是这就说明了一切。 □

第四章 稳定 ∞-范畴的 K 理论

4.1 Waldhausen S-构造

现在的目标是定义一个函子 $k : Cat_\infty^{st} \to CGrp(An)$。这很明显是 Waldhausen 构造在连合谱上的推广。

定义 4.1.1. 定义 $S_n\mathcal{C} \subseteq Fun(Ar(\Delta^n), \mathcal{C})$ 为如下函子 F 张成的全子范畴：

1. $F(i \geq i) = 0, \forall i = 0, \cdots, n$
2. $Ar(\Delta^n)$ 中的方块全部被映为推出-拉回方块。

截断到 1-单形上来看，这恰好就是 Waldhausen 构造！

这是因为 $Ar(\Delta^n)$ 中的 0-单形是 $\mathrm{Hom}_{sSet}(\Delta^0 \times \Delta^1, \Delta^n) = \mathrm{Hom}_{sSet}(\Delta^1, \Delta^n) \overset{Yoneda}{=} \mathrm{Hom}_\Delta([1], [n])$，因此恰好形如 $i \leq j$ 的形式。

而 $Ar(\Delta^n)$ 中的 1-单形则同理是 $\mathrm{Hom}_{sSet}(\Delta^1 \times \Delta^1, \Delta^n)$，它恰好是 Waldhausen 构造图表中的长方形，etc.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & (n \leq n) \\
 & & & \cdots \arrow[r] & \cdots \arrow[u] \\
 & & (1 \leq 2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (1 \leq n) \arrow[u] \\
 & (0 \leq 1) \arrow[r] & (0 \leq 2) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & (0 \leq n) \arrow[u] \\
(0 \leq 0) \arrow[r] & (0 \leq 1) \arrow[r] \arrow[u] & (0 \leq 2) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & (0 \leq n) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

现在通过限制到 $(0 \leq 1), (0 \leq 2), \cdots, (0 \leq n)$，这恰好就说明 $S_n(\mathcal{C}) \simeq Fun(\Delta^{n-1}, \mathcal{C})$，于是自然 $S_n(\mathcal{C})$ 也是稳定的。进一步我们发现 $S_n(\mathcal{C}) \subseteq Fun(Ar(\Delta^n), \mathcal{C})$ 在单纯形的面映射和退化映射下保持，于是这就给出了

$$S : Cat_\infty^{st} \to sCat_\infty^{st}$$

定义 $k(\mathcal{C}) = \Omega|coreS(\mathcal{C})|$

($sCat_\infty^{st} \xrightarrow[deg.wise]{core} sCat_\infty \xrightarrow{|-|} (Cat_\infty)_{\geq 1} \xrightarrow{\Omega} CGrp$) 这和经典的 Waldhausen 构造是几乎一样的，其中 $core$ 在于我们指定 $wS_\bullet$ 的态射为弱等价。

特别地，$\pi_0|coreS(\mathcal{C})| = 0$ 是因为 $\pi_0(coreS(\mathcal{C}))_0 = 0$：$S_0(\mathcal{C}) \simeq *$。

我们事实上还有 Quillen Q 构造的推广版。取 $TwAr(\mathcal{C})$ 为 $*/An \to An$ 沿 $\mathrm{Hom} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to An$ 的拉回。$TwAr(\Delta^n)$ 直观上也是 $(n+1) \times (n+1)$ 的上三角图表，只不过箭头都指向直角顶点。即：

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \bullet \\
 & & & & \bullet \arrow[u] \\
 & & \bullet \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \\
 & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bullet \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

那么类似 S-构造，我们给出了 Q-构造 $Q(\mathcal{C}) \in sCat_\infty$。即 $Q_n(\mathcal{C}) \subseteq Fun(TwAr(\Delta^{n\,op}), \mathcal{C})$ 为将方块映为 $\mathcal{C}$ 中拉回的全子范畴。类似 S 构造中限制到一条边，将图表限制到对角线附近的折线上，取 $J_n \subseteq TwAr(\Delta^n)^{op}$ 为全体 0-单形和 $(i \le j) s.t. j \le i+1$ 的 1-单形张成的子范畴，那么 $Q_n(\mathcal{C}) = Fun(J_n, \mathcal{C})$。

定理 4.1.2 (Q=S).

$$k(C) \simeq \Omega |asscat(core(Q(\mathcal{C})))|$$

其中 $|-| : Cat^\infty \to An$ 是对所有态射做局部化；

$$asscat : sAn \to Cat_\infty$$

是 $\Delta \to Cat_\infty : [n] \mapsto [n]$ 沿 *Yoneda* 嵌入 $\Delta \to Func(\Delta^{op}, An)$ 的左 *Kan* 扩张。

4.2 万有加性不变量与加性定理

这一章节中我们严格地阐述 K 理论的本质是 ∞-版本的万有加性不变量：即对某个群胚（$\mathbb{E}_\infty$-幺半群）取群化。

定理 4.2.1. Cat_∞^{st} 是半加性的。

Sketch. Cat_∞^{st} 上的乘积从 Cat_∞ 中继承。[Lur17, Prop 2.4.3.19] 指出我们只需要找到 $(\Delta : x \to x \times x) \Rightarrow \mathrm{id}$ 的自然变换，使得 $x \simeq x \times * \to x \times x \to x$（以及对称的态射）是等价。这是因为考虑 $\mathcal{C}$ 上的 coCartesian 幺半结构，它给出了 $(-)^{\sqcup} : Cat_\infty \to Op_\infty$。特别地，$\mathcal{C} \in Cat_\infty^{st}$ 有有限余积，因此它进一步变为：

$$(-)^{\oplus} : Cat_\infty^{st} \to CMon(Cat_\infty)$$

于是这就给出了一个 $\oplus_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，这就是满足要求的自然变换 $\oplus : \Delta \Rightarrow \mathrm{id}$。 $\square$

4.2.1 稳定 ∞-范畴的工具：Verdier 序列

定义 4.2.2 (Verdier).

1. Cat_∞^{st} 中的序列 $\mathcal{A}\to\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 称为 Verdier 序列，如果它同时是纤维列和余纤维列，即：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[d] \\ * \arrow[r] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

是推出-拉回方块。称它左/右分裂，如果两个函子都有左/右伴随；称它分裂如果两个函子都有左伴随和右伴随。

2. 能够嵌入到 Verdier 序列的 $\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 称为 Verdier 投射，形如 $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 则称为 Verdier 内射。称 Verdier 投射/内射是左/右分裂的，如果它们有左/右伴随

3. Verdier 方块是 Cat_∞^{st} 中的拉回方块

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[d] \\ \mathcal{C} \arrow[r] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

使得竖直的态射都是 Verdier 投射。一个 Verdier 方块称为左/右分裂/分裂的，如果竖直的 Verdier 投射是左/右分裂/分裂的。

4. 到有有限极限的范畴的函子 $F: Cat_\infty^{st}\to\mathcal{E}$ 称为加性的，如果 $F(0)$ 是终对象并且 F 将分裂的 Verdier 方块映为 $\mathcal{E}$ 的拉回方块；称为 Verdier 局部化，如果它加性并将所有 Verdier 方块映为 $\mathcal{E}$ 中的拉回方块；称为 Karoubi 局部化，如果它是 Verdier 局部化并且将稠密嵌入（使得大范畴的对象都典范地是小范畴若干对象的余极限）映为等价。

对应的 $Fun(Cat_\infty^{st},\mathcal{E})$ 的全子范畴记为

$$Fun^{Kar}(Cat_\infty^{st},\mathcal{E})\subseteq Fun^{Verd}(Cat_\infty^{st},\mathcal{E})\subseteq Fun^{add}(Cat_\infty^{st},\mathcal{E})$$

一个加性函子 $F: Cat_\infty^{st}\to\mathcal{E}$ 称为群状的，如果它穿过 $CGrp(\mathcal{E})$。对应的全子范畴记为 $Fun^{grp}(Cat_\infty^{st},\mathcal{E})$。

例子.

1. 由于 Cat_∞^{st} 是半加性的，那么：
$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}\times\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \\ \mathcal{A} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
是分裂 Verdier 方块。

2. $\mathcal{C}\to\mathcal{C}\to 0, \mathcal{A}\to\mathcal{A}\times\mathcal{C}\to\mathcal{A}$ 总是分裂 Verdier 序列。

3. 作为推论：加性函子保持有限积。于是：

$$Fun^{add}(Cat_\infty^{st},\mathcal{E})\simeq Fun^{add}(Cat_\infty^{st},CMon(\mathcal{E}))\simeq CMon(Fun^{add}(Cat_\infty^{st},\mathcal{E}))$$

其中第一个等价是定理 3.1.13。并且更进一步

$$Fun^{grp}(Cat_\infty^{st},\mathcal{E})\simeq CGrp(Fun^{add}(Cat_\infty^{st},\mathcal{E}))$$

定理 4.2.3 (Cat_∞^{st} 中的纤维列和余纤维列). 给定 Cat_∞^{st} 中的 $p:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$:

$$fib(p)\simeq\{b\in\mathcal{B}|p(b)\simeq 0\}\subseteq\mathcal{B}$$

由于 p 是正合的，$fib(p)$ 在有限直和以及纤维/余纤维序列下封闭。于是它是 $\mathcal{B}$ 的稳定 ∞-子范畴，并且它给出了正确的纤维列。

给定 Cat_∞^{st} 中的 $f:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$，$f$ 的本质像是指所有和 $f(a)$ 等价的对象张成的全子 ∞-范畴。f 的正合性保证了它在有限直和下封闭。取

$$cofib(f)\simeq\mathcal{B}/\mathcal{A}=\mathcal{B}[\{\mathrm{mod}\mathcal{A}\ equiv.\}^{-1}]$$

其中 $\mathrm{mod}\mathcal{A}\ equiv.$ 是指所有 $\mathcal{B}$ 中的 $\varphi:x\to y$ 满足其纤维/余纤维是 f 的本质像生成的稳定 ∞-子范畴中的对象。可以验证它给出了正确的余纤维列。

定理 4.2.4 (Verdier). $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是稳定 ∞-范畴间的正合函子

1. F 是 *Verdier* 投射 $\iff$ 它是一个局部化，在这种情况下他是对 $\mathrm{mod}-fib(F)$ 的局部化
2. F 是左/右分裂 *Verdier* 投射 $\iff$ 它有全忠实左/右伴随（即它是左/右 *Bousfield* 局部化）
3. F 是 *Verdier* 内射 $\iff$ 它全忠实并且本质像在 $\mathcal{B}$ 的收缩中封闭（即 $\forall B\in essimg,\exists A,i: A\to B, r:B\to A\in essimg, \text{s.t.} A\to B\to A=\mathrm{id}_A$）
4. F 是左/右分裂 *Verdier* 内射 $\iff$ 它是全忠实的并且有左/右伴随

更进一步地，左分裂/右分裂 *Verdier* 序列的左/右伴随诱导了倒转顺序的右分裂/左分裂 *Verdier* 序列。

分裂 *Verdier* 序列

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "f"] & \mathcal{B} \arrow[l, bend right, "g"'] \arrow[l, bend left, "g'"] \arrow[r, "p"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend right, "q"'] \arrow[l, bend left, "q'"] \end{tikzcd}$$

给出了 $gq'\simeq cofib(q\Rightarrow q')\simeq cofib(g'\Rightarrow g)\simeq g'q[1]$。并且 $\forall b\in\mathcal{B}$，有推出-拉回方块

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r] \arrow[d] & fg(b) \arrow[d] \\ q'p(b) \arrow[r] & fgq'p(b) \end{tikzcd}$$

以及

$$\begin{tikzcd} fg'qp(b) \arrow[r] \arrow[d] & fg'(b) \arrow[d] \\ qp(b) \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$

最后这个推出-拉回方块在 Cat_∞^{st} 中转化为拉回方块：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "g\Rightarrow gq'p"] \arrow[d] & Ar(\mathcal{A}) \arrow[d, "t"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "gq'"'] & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

4.2.2 加性定理

定义 4.2.5. 给定稳定 ∞-范畴 Δ 中的推出方块

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "i"'] & {[n-i]} \arrow[d, "+i"] \\ {[i]} \arrow[r] & {[n]} \end{tikzcd}$$

给出了 Verdier 方块：

$$\begin{tikzcd} Q_n(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d] & Q_i(\mathcal{C}) \arrow[d] \\ Q_{n-i}(\mathcal{C}) \arrow[r] & Q_0(\mathcal{C}) \end{tikzcd}$$

现在考虑一个加性函子 $F : Cat_\infty^{st} \to An$，那么我们有 $F(Q(\mathcal{C})) \in sAn$。

定义 $Span^F(\mathcal{C}) = asscat(F(Q(\mathcal{C})))$。其中

$$asscat : sAn \to Cat_\infty$$

是 $\Delta \to Cat_\infty : [n] \mapsto [n]$ 沿 Yoneda 嵌入 $\Delta \to Func(\Delta^{op}, An)$ 的左 Kan 扩张。

定理 4.2.6 (Waldhausen 加性定理). *如果 $F : Cat_\infty^{st} \to An$ 是加性的，那么：*

$$|Span^F(-)| : Cat_\infty^{st} \to An$$

也是加性的。其中 $|-| : Cat^\infty \to An$ 是对所有态射做局部化；

特别地：$k : Cat_\infty^{st} \to An$ 是加性的：因为 $k(\mathcal{C}) \simeq \Omega|asscat(core(Q(\mathcal{C})))| \simeq \Omega|Span^{core}(\mathcal{C})|$，而 $core$ 是加性的。第一个等价是定理 4.1.2。

我们分四步证明。

Step 1. $p : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 如果是分裂 Verdier 投射，那么它是 biCartesian 纤维化。这几乎是如下引理：

引理 4.2.7. *$g : \mathcal{B} \rightleftarrows \mathcal{A} : f$ 是 Cat_∞ 中的伴随对，余单位 $c : gf \implies \mathrm{id}_A$。那么：*

1. $\mathcal{A}$ 中态射 $\varphi : x \to y$ 是 f-coCartesian 的 $\iff$ 如下是 $\mathcal{A}$ 中推出方块

$$\begin{tikzcd} gf(x) \arrow[r] \arrow[d] & gf(y) \arrow[d] \\ x \arrow[r] & y \end{tikzcd}$$

2. 如果 $\mathcal{A}$ 有推出，f 保持推出，g 全忠实。那么 f 是 coCartesian 纤维化。

证明. 回忆 coCartesian 边：$\varphi : x \to y$ 是 f-coCartesian 的 $\iff$ 如下是拉回方块：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(y,z) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(x,z) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}(f(y),f(z)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(f(x),f(z)) \end{tikzcd}$$

但是将 $\mathrm{Hom}(f(-),f(-))=\mathrm{Hom}(gf(-),-)$ 代入，两个方块之间只相差 $\mathrm{Hom}(-,z)$ 作用。

对于第二部分，对于 $\mathcal{B}$ 中态射 $\varphi':x'\to y'$，$x\in\mathcal{A} s.t. f(x)\simeq x'$。由于 g 全忠实：$\mathrm{Hom}(z,fg(y'))=\mathrm{Hom}(g(z),g(y'))=\mathrm{Hom}(z,y')$，因此 $y'\simeq fg(y')$。于是 $\varphi':f(x)\to y'$ 通过伴随诱导了 $gf(x)\to g(y')$。现在取推出方块：

$$\begin{tikzcd}
gf(x) \arrow[r] \arrow[d] & g(y') \arrow[d] \\
x \arrow[r] & y
\end{tikzcd}$$

作用 f 给出了：

$$\begin{tikzcd}
f(x)\simeq x' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & y' \arrow[d] \\
x' \arrow[r, "f(\varphi)"'] & f(y)
\end{tikzcd}$$

因此 $\varphi:x\to y$ 是 φ' 的提升，它还是 f-coCartesian 提升。这就说明了结果。 $\square$

回到第一步：对 p 和它的全忠实 (定理 4.2.4) 左伴随/右伴随使用引理就完成了证明。

Step 2. $p:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 如果是分裂 Verdier 投射（从而是正合 biCartesian 纤维化），那么 $Span^F(p):Span^F(\mathcal{C})\to Span^F(\mathcal{D})$ 也是 biCartesian 纤维化。

取 $Span(\mathcal{C})=Asscat(core(Q(\mathcal{C})))$。我们先证明 $Span$（即 $F=core$ 的情况）：

Claim. $Span(\mathcal{C})$ 中的一个态射 $x\to z$，即一个 $x\leftarrow y\to z$ 是 $Span(p)$-coCartesian 的，如果 $y\to x$ 是 p-Cartesian 的且 $y\to z$ 是 p-coCartesian 的。

为了证明这件事，我们需要完成的是如下形状图表的提升问题。

$$\begin{tikzcd}
 & & v & & & & p(v) \\
 & z & \bullet \arrow[l, dashed] \arrow[u, dashed] & \mapsto & & p(z) & u \arrow[l] \arrow[u] \\
x & y \arrow[l] \arrow[u] & w \arrow[l, dashed] \arrow[u, dashed] \arrow[uu, bend right] \arrow[ll, bend left] & & p(x) & p(y) \arrow[l] \arrow[u] & p(w) \arrow[l] \arrow[u] \arrow[uu, bend right] \arrow[ll, bend left]
\end{tikzcd}$$

其中方块都是拉回。然而 $w\to y$ 由 $y\to x$ 的 p-Cartesian 性给出；$w\to\bullet$ 由 $p(w)\to u$ 的 coCartesian 提升给出。$w\to\bullet$ 现在是 p-coCartesian 的，于是我们就给出了 $\bullet\to z,\bullet\to v$。左侧方块是拉回由 coCartesian 性的定义恰好仅当 $w\to\bullet$ 是 p-coCartesian 的，于是这就完成了证明。

现在我们来说明 $Span(p)$ 是 biCartesian 纤维化。原因是给定 $x\leftarrow y\to z$。对任何 $p(x)\leftarrow y'\to z'$，存在 p-Cartesian 提升 $x\leftarrow y$，再做 coCartesian 提升 $y\to z$。再用上一 Claim，我们就完成了 coCartesian 提升；Cartesian 一侧论证是完全对偶的。

对于一般的情况，论证大体是类似的。$\mathcal{E}\subseteq Q_1(\mathcal{C})$ 取为左侧边是 p-Cartesian，右侧边是 p-coCartesian 的全子范畴，那么我们只需说明

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \\
Q_1(\mathcal{D}) \arrow[r] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

这大体来说就是前一段落的论证。论述细节不表。同样我们有：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}\times_{Q_1(\mathcal{C})} Q_2(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}\times_{\mathcal{C}} Q_1(\mathcal{C}) \arrow[d] \\ Q_2(\mathcal{D}) \arrow[r] & Q_1(\mathcal{D})\times_{\mathcal{D}} Q_1(\mathcal{D}) \end{tikzcd}$$

那么由于 F 是加性的，作用到第二个方块上，拉回图表恰好说明 $F(\mathcal{E})\to F(Q_1(\mathcal{C}))\to \mathrm{Hom}([1], Span^F(\mathcal{C}))$ 的像都是 $Span^F(p)$-coCartesian 边；作用到第一个方块上说明这样的提升是存在的。于是这就完成了第二步的证明。

Step 3. 如果拉回图表的一条边是 biCartesian 纤维化，那么它在 $|-|: Cat_\infty \to An$（对所有态射做局部化）下的作用也是拉回图表。假定给出拉回图表 $\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[d] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "p"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$。使得 $\mathcal{B}\to\mathcal{D}$ 是 biCartesian 纤维化，那么 $\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ 也是 biCartesian 纤维化。取 $\mathcal{B}\to\mathcal{D}$ 的 straightening $F:\mathcal{D}\to Cat_\infty$，由于拉回在 coCartesian Straightening 下变为复合：$\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ 的 Straightening 是 $F\circ p$。

现在由于 $\mathcal{D}\to Cat_\infty\to An$ 将每个态射 $\varphi: x\to y$ 映为一个左伴随 $F(\varphi)$（右伴随是 Cartesian 提升），那么进一步就变成了等价 $|F(\varphi)|$。因此它穿过 $|\mathcal{D}|$，设为 $|F|:|\mathcal{D}|\to An$。于是利用 left fibration 和到 An 的 Straightening/Unstraightening 等价，我们有拉回：

$$\begin{tikzcd} Un^l(|F|\circ|p|) \arrow[r] \arrow[d] & Un^l(|F|) \arrow[d] \\ |\mathcal{C}| \arrow[r] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

于是只需说明这真的是原有拉回方块在 $|-|$ 下的像。但是这是因为我们有 unstraightening 的直接描述 (Lurie)：

$$|Un^{cocart}(F)| \simeq |\operatorname{colim}(D\to Cat_\infty)| \simeq \operatorname{colim}(D\to Cat_\infty\to An)$$

$$\simeq \operatorname{colim}(|D|\to An)\simeq Un^l(|F|)$$

这就完成了证明。

Step 4. $Span^F(-)$ 将分裂 Verdier 方块映为 Cat_∞ 中的拉回。

由于 $Q_n = Fun(J_n,-)$ 将拉回映为拉回，并保持全忠实的伴随函子：那么它将分裂 Verdier 方块映为分裂 Verdier 方块。于是 $F(Q(-))$ 变为拉回方块。现在只需观察 $asscat$ 的作用：事实上这是因为对于 sAn 中的对象，我们总有全忠实的

$$asscat(X\times_Y Z)\to asscat(X)\times_{asscat(Y)} asscat(Z)$$

这是因为我们有拉回图表：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{asscat(X)}(x,y) \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[d, "{(d_1,d_0)}"] \\ * \arrow[r, "{(x,y)}"'] & X_0\times X_0 \end{tikzcd}$$

现在我们只需处理这个映射的本质满性：然而 $core\ asscat(X) \simeq |X^\times|$（$X^\times$ 是 Cartesian 幺半结构），我们只需说明：

$$\pi_0|X^\times \times_{Y^\times} Z^\times| \to \pi_0(|X^\times| \times_{|Y^\times|} |Z^\times|)$$

是满的，如果 $asscat(X) \to asscat(Y)$ 是 biCartesian 纤维化（这被 Step2 保证了）。

右侧的连通分支可以表示为 $x \in X_0, y \in Z_0$ 以及 $|Y^\times|$ 中联结它们的像一条路。然而这样的路可以通过 biCartesian 纤维化提升为 X 中的一条路，于是这就给出了一个 $\pi_0|X^\times \times_{Y^\times} Z^\times|$ 中的原像。

Step 2, 3, 4 共同说明了结果。□

引理 4.2.8. *$F : Cat_\infty^{st} \to An$ 如果是群状的，并且 $\mathcal{C}$ 是稳定 ∞-范畴。那么：*

$$F(Ar(\mathcal{C})) \simeq F(\mathcal{C}) \times F(\mathcal{C})$$

$$F(Q_n(\mathcal{C})) \simeq F(\mathcal{C})^{2n+1}$$

并且 $Span^F(\mathcal{C}) \simeq BF(\mathcal{C})$

注记. 我们能够感性上相信它成立：群状函子抹去了拉回方块的信息只保留了加性结构。那么 Q_n 中对角线上的 $(2n+1)$-折线就完全描述了其在 F 下的像。事实上 Waldhausen 加性定理最初的样子就是 $k(Ar(\mathcal{C})) \simeq k(\mathcal{C}) \times k(\mathcal{C})$。

定理 4.2.9. *如果 $F : Cat_\infty^{st} \to An$ 是群状函子，那么 Cat_∞ 中的拉回方块*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{Span^F(\mathcal{C})} \arrow[r] \arrow[d] & 0/Span^F(\mathcal{C}) \arrow[d] \\
* \arrow[r, "0"'] & Span^F(\mathcal{C})
\end{tikzcd}$$

在 $|-|$ 的作用下给出了

$$\begin{tikzcd}
F(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d, "0"] \\
* \arrow[r, "0"'] & |Span^F(\mathcal{C})|
\end{tikzcd}$$

因此 $F(\mathcal{C}) \simeq \Omega|Span^F(\mathcal{C})|$。

证明. 前一引理已经说明了 $Span^F(\mathcal{C}) \simeq |Span^F(\mathcal{C})| \simeq BF(\mathcal{C})$，但是 $F(\mathcal{C})$ 已经是 $\mathbb{E}_\infty$-群（回忆 Verdier 序列的例 3），那么 $\Omega BF(\mathcal{C}) \simeq F(\mathcal{C})$，这就直接说明了结果。□

下面我们终于能够完成万有加性不变量这一性质的刻画了：

定理 4.2.10. *$Fun^{grp}(Cat_\infty^{st}, CGrp(An)) \subseteq Fun^{add}(Cat_\infty^{st}, An)$ 有左伴随 $(-)^{grp} \simeq \Omega|Span^{(-)}(\bullet)|$，并且*

$$k \simeq core^{grp}$$

因此 K-理论是取群胚 $core$ 的万有群化：这实际上回到了最初的 Grothendieck 群的定义。

证明. $\Omega|Span^F(\mathcal{C})|$ 是加性的，并且 Ω 保持极限，因此这给出了一个群状函子。我们来说明 $L \simeq \Omega|Span^{(-)}(\bullet)|$ 是左 Bousfield 局部化：由 [Lur09, Prop 5.2.7.4]，只需找到一个自然变换 $\eta : \mathrm{id} \implies L$ 使得 $\eta_{Lx} : Lx \to LLx, L\eta_x : Lx \to LLx$ 都是等价。

现在前一引理的计算事实上说明了 $F(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{Span^F(\mathcal{C})}(0,0), \forall F$ 加性，于是这自动给出了：

$$\mathrm{Hom}_{Span^F(\mathcal{C})}(0,0) \to \mathrm{Hom}_{|Span^F(\mathcal{C})|}(0,0)$$

这实际上就是 $\mathrm{id} \implies L$ 的自然变换。上一定理直接帮助我们验证了这个 η 满足要求，因此这说明 L 是 Bousfield 局部化。

最后是计算本质像，但是前一定理帮助说明了所有群状函子 F 都具有形式 $\Omega|Span^F(-)|$，这就完成了证明。 $\square$

4.3 纤维化定理和局部化定理

我们的目标是证明交换环的局部化诱导了 K 理论上的长正合列，由于交换环 R 的 K 理论在这个情形下实际上是 $\mathcal{D}^{perf}(R)$。我们首先对局部化诱导的稳定范畴进行讨论。

定义 4.3.1. 称 $f : R \to S$ 是 $\mathbb{E}_\infty$-环之间的局部化，如果乘积 $\mu : S \otimes_R S \to S$ 是等价。

引理 4.3.2. *对于 $\mathbb{E}_\infty$-环之间的局部化 $f : R \to S$，我们有分裂 Verdier 序列*

$$\begin{tikzcd} Mod_S \arrow[r, "f^*"] & Mod_R \arrow[l, bend right, "S\otimes_R -"'] \arrow[l, bend left, "\hom_R(S,-)"] \arrow[r, "I\otimes_R -"] & Mod_R^{S-tors} \arrow[l, bend right, "incl."'] \arrow[l, bend left, "\hom_R(I,-)"] \end{tikzcd}$$

其中 f^* 是遗忘函子，$I \simeq fib(f : R \to S)$，$Mod_R^{S-tors} \subseteq Mod_R$ 是所有使得在 $S \otimes_R -$ 下消失的 R-模谱张成的稳定 ∞-全子范畴。

定理 4.3.3. *如果 $f : R \to S$ 是 $f : R \to R[s^{-1}], s \in \pi_0(R)$；或者 $R = HA, S = HB$，f 是某个 $\varphi : A \to B$ 的导出局部化（指诱导的 $RHom_A(B,-) : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(B)$ 是右 Bousfield 局部化，等价地 $B \otimes_A^L (B/_\varphi^L A) \simeq 0$）诱导得到的，那么 f 是 $\mathbb{E}_\infty$-环的局部化。*

我们现在需要研究的是离散环的到处局部化 $f : R \to S$ 给出的 $\mathcal{D}(S) \to \mathcal{D}(R) \to \mathcal{D}(R)^{S-tors}$ 诱导的 K 理论上的态射。回忆 $\mathcal{D}(R) \simeq Mod_{HR}$。

定义 4.3.4. $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是稳定 ∞-范畴之间的正合函子，那么定义相对 Quillen Q-构造 $Q(f) \in sCat_\infty^{st}$ 为如下拉回

$$\begin{tikzcd} Q(f) \arrow[r] \arrow[d] & Null(\mathcal{B}) \arrow[d, "d_0"] \\ Q(\mathcal{A}) \arrow[r, "f"'] & Q(\mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

其中 $Null(\mathcal{B}) : \Delta^{op} \to An$ 定义如下：它满足 $asscat(F(Null()C)) \simeq 0/Span^F(\mathcal{C})$。具体构造为：$[0] \star - : \Delta^{op} \to \Delta^{op}$ 诱导了 $dec : sAn \to sAn$（déclage）。$[0] \subseteq [0] \star [n]$ 和 $[n] \subseteq [0] \star [n]$ 分别诱导了自然变换：

$$p : dec \Rightarrow const\ ev_0; \quad d_0 : dec \Rightarrow \mathrm{id}$$

定义 $Null(\mathcal{C}) = fib_0(p : decQ(\mathcal{C}) \to const\mathcal{C})$

定理 4.3.5. *$F : Cat^{st}_\infty \to An$ 如果是群状的，那么：*

$$|F(Q(f))| \to |F(Q(\mathcal{A}))| \to |F(Q(\mathcal{B}))|$$

是纤维列。并且如下等价：

1. *F 是 Verdier 局部化并且将 Verdier 投射映为 π_0-满射*
2. *对任何 Verdier 内射 $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，$|F(Q(i))| \to F(\mathcal{B}/\mathcal{A})$ 是等价*
3. *$B^\infty F : Cat^{st}_\infty \to Sp$ 是 Verdier 局部化*

定理 4.3.6 (Waldhausen 纤维化定理)**.** *对于稳定子 ∞-范畴 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$。$K$ 是一个有限 ∞-范畴（几何实现具有有限同伦型），取 $Fun^{\mathcal{A}}(K, \mathcal{B}) \subseteq Fun(K, \mathcal{B})$ 为所有对象和逐点 $\mathrm{mod}\mathcal{A}$-等价的自然变换张成的子范畴。那么：*

$$|Fun^{\mathcal{A}}(K, \mathcal{B})| \to Fun(K, \mathcal{B}/\mathcal{A})$$

是忠实的（诱导了 Hom Kan 复形上 π_0 的单射）。特别注意这里 $|-|$ 是取包络群胚。并且：

1. *$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ 是 Verdier 内射，那么上述映射是等价*
2. *$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ 是稠密的，那么 $|Fun^{\mathcal{A}}(K, \mathcal{B})|$ 离散（$\mathcal{B}/\mathcal{A} \simeq 0$，事实上它恰好是离散子群 $K_0Fun(K, \mathcal{B})/K_0Fun(K,$*

前两个定理共同说明：

推论 4.3.7. *$k : Cat^{st}_\infty \to An$ 是 Verdier 局部化，$K \simeq B^\infty k$ 也是如此。*

定义 4.3.8 (Karoubi 序列)**.** 取 $Cat^{st}_{\infty,\natural} = Cat^{st}_\infty[\{Karoubi\ Equiv\}^{-1}]$，其中 Karoubi 等价由稠密子范畴的嵌入生成。一个 Karoubi 序列指 Cat^{st}_∞ 中的一个序列使得其在 $Cat^{st}_{\infty,\natural}$ 变为纤维-余纤维序列。类似地有 Karoubi 内射和 Karoubi 投射。

定理 4.3.9 (Thomason-Neeman 局部化定理)**.** *复合为零的序列 $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 是 Karoubi 序列当且仅当 $Ind(\mathcal{A}) \to Ind(\mathcal{B}) \to Ind(\mathcal{C})$ 是 Verdier 序列。（自然 $Ind(\mathcal{C})$ 是那些保持有限极限的函子 $\mathcal{C}^{op} \to An$）*

定义 4.3.10. 对于 $\mathbb{E}_\infty$-环谱，定义

$$k(R) = k(Mod^\omega_R); \quad K(R) = K(Mod^\omega_R)$$

其中上标 $^\omega$ 指紧对象的全子范畴。

定义 4.3.11. $R \to S$ 是 $\mathbb{E}_\infty$-环谱的局部化，称它有完美生成纤维，如果 $I = fib(R \to S)$ 落在 $Mod^{S-tors,\omega}_R = Mod^{S-tors}_R \cap Mod^\omega_R$ 在 Mod^{S-tors}_R 中生成的稳定 ∞-子范畴内。

这个技术性条件的引入是因为：

引理 4.3.12. *$Mod^{S-tors,\omega}_R = Mod^{S-tors}_R \cap Mod^\omega_R$ 在 Mod^{S-tors}_R 中生成的稳定 ∞-子范畴是 $Ind(Mod^{S-tors,\omega}_R)$。特别地，以下等价：*

1. $R \to S$ 有完美生成纤维

2. $Ind(Mod_R^{S-tors,\omega}) \to Mod_R^{S-tors}$ 是等价

3. $Mod_R^{S-tors,\omega} \to Mod_R^{\omega} \to Mod_S^{\omega}$ 是 *Karoubi* 序列。

推论 4.3.13 (Quillen 纤维序列). 如果 $R \to S$ 是 $\mathbb{E}_\infty$-环谱之间的局部化使得其有完美生成纤维，那么存在纤维列

$$k(Mod_R^{S-tors,\omega}) \to k(R) \to k(S)$$

特别地，如果离散环 $R \to S$ 是导出局部化，那么存在纤维列

$$k(\mathcal{D}^{perf}(R)^{S-tors}) \to k(R) \to k(S)$$

注记. Efimov 移除了完美生成纤维条件。

最后我们还有 Dévissage 的推广：

定理 4.3.14 (Dévissage). $\mathcal{C}$ 是配备穷竭 t-结构（$\mathcal{C} = \cup \mathcal{C}_{[-n,n]}$）的稳定 ∞-范畴。那么：

1. $k(\mathcal{C}^\heartsuit) \simeq k(\mathcal{C})$，其中左侧是 *Abel* 范畴的 K 理论。

2. $\mathcal{D}$ 是配备穷竭 t-结构的稳定 ∞-范畴，$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是正合并且保持 t-结构。如果 $F : \mathcal{C}^\heartsuit \to \mathcal{D}^\heartsuit$ 全忠实，本质像在子对象和商对象下封闭，并且 $\forall b \in \mathcal{D}^\heartsuit$，存在有限滤过：

$$0 = b_0 \subseteq b_1 \subseteq \cdots \subseteq b_n = b$$

使得 b_{i+1}/b_i 落在 F 的本质像中。那么 F 诱导了同构 $k(\mathcal{C}) \simeq k(\mathcal{D})$

推论 4.3.15. 对于 *Dedekind* 整环 R，$\oplus_{\mathfrak{m}} \mathcal{D}^{perf}(R/\mathfrak{m}) \to \mathcal{D}^{perf}(R)^{tors}$ 诱导了 K 理论的同构：

$$\oplus K(R/\mathfrak{m}) \to K(\mathcal{D}^{perf}(R)^{tors})$$

于是自动有纤维列

$$\oplus K(R/\mathfrak{m}) \to K(R) \to K(Frac\ R)$$

证明. 简而言之，只需验证这个函子满足 Dévissage 的条件，剩余是代数验证。 □

参考文献

[Lur09] Jacob Lurie. "Higher Topos Theory". In: *Annals of Mathematics Studies* 170 (2009). eprint: math/0608040 (cit. on p. 53).

[Lur17] Jacob Lurie. *Higher Algebra*. Preprint. 2017 (cit. on pp. 36, 46).

[Wei13] Charles Weibel. *The K-book: an introduction to algebraic K-theory*. Vol. 145. Graduate Studies in Math. AMS, 2013 (cit. on pp. 5, 12, 14, 16, 18).